

SÉRIE A, N° 4041

N° D'ORDRE : 4892

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

MUMM THIOUNN

1^{re} THÈSE. — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de M^r L. de Broglie ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1963
Soutenues le 6 juin 1963 devant la Commission d'examen

Mr L. DE BROGLIE

Président

M^{me} M.-A. TONNELAT

Mr J. VILLE

} *Examineurs*

Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique

Éditions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1965



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : THIOUNN

Prénom : Mumm

Date de la soutenance : 6 juin 1963

Numéro d'ordre : Série A, 4041, N° 4892

1

THIOUNN (Mumm). — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de M^r L. de Broglie ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 51 p., 3 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4041, N° 4892.

2

THIOUNN (Mumm). — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de M^r L. de Broglie ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique 1965, 51 p., 3 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4041, N° 4892.

3

THIOUNN (Mumm). — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de M^r L. de Broglie ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 51 p., 3 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4041, N° 4892.

4

THIOUNN (Mumm). — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de M^r L. de Broglie ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 51 p., 3 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4041, N° 4892.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

MUMM THIOUNN

1^{re} THÈSE. — « Solutions singulières des équations de Dirac et théorie de la double solution de Mr L. de Broglie ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 juin 1963 devant la Commission d'examen

Mr L. DE BROGLIE

Président

M^{me} M.-A. TONNELAT

Examineurs

Mr J. VILLE

Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1965

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

G. JULIA.....	T Analyse supérieure et algèbre supérieure.	ULRICH.....	T Physiol. Vég.
PRENANT.....	T Anatomie et Histologie comparée.	MARECHAL.....	T Optique théor. et Appli.
GRASSÉ.....	T Evolution des êtres organisés.	KIRRMANN.....	T Théories chimiques.
PREVOST.....	T Chimie organique.	CHADEFAUD.....	T Botanique.
WYART.....	T Minéralogie et Cristallo.	M ^{lle} LE BRETON ..	T Physiol. de la Nutrit.
TEISSIER.....	T Zoologie.	LELONG.....	T Application de l'analyse à la géométrie.
MANGENOT.....	T Biol. Végét. (Orsay).	DEVILLERS.....	T Anatomie et Hist. Compar.
AUGER.....	T Physique quantique et relativité.	EHRESMANN.....	T Topologie Algébrique.
MONNIER.....	T Physiologie générale.	FRANÇON.....	T Physique (SPCN).
PIVETEAU.....	T Paléontologie.	GLANGEAUD.....	T Géographie Phys. et Géol. dynamique.
ROCARD.....	T Physique (ENS).	GODEMENT.....	T Mathématiques (MPC).
CARTAN.....	T Mathématiques (ENS).	PISOT.....	T Tech. Math. de la Phys.
LAFFITTE.....	T Chimie générale.	ROCH.....	T Géologie.
FAYARD.....	T Géométrie supérieure.	SCHATZMAN.....	T Astrophysique.
COLOMB.....	T Physique du globe.	TERMIER.....	T Paléontologie stratig.
M ^{lle} COUSIN.....	T Biol. animale (SPCN).	ZAMANSKY.....	T Mathématiques générales.
CHRETIEN.....	T Chimie minérale.	LENNUIER.....	T Physique (MGP).
DRACH.....	T Zoologie.	RIZET.....	T Génétique.
KASTLER.....	T Physique (ENS).	ROUTHIER.....	T Géologie appliquée.
EPHRUSSI.....	T Génétique.	M ^{me} TONNELAT ..	T Physique théorique.
RIVIERE.....	T Géologie SPCN et Sédim.	DIXMIER.....	T Mathématiques (MPC).
GAUTHERET.....	T Biologie Vég. (PCB).	SOUCHAY.....	T Chimie générale.
LUCAS R.....	T Recherches Physiques.	AIGRAIN.....	T Electrotechnique gén.
THOMAS A.....	T Biologie cellulaire.	BRUSSET.....	T Chimie systématique.
ARNULF.....	T Optique appliquée.	M. LEVY.....	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
MORAND.....	T Physique Enseignement.	M ^{me} CHAIX.....	T Chimie biologique.
SOLEILLET.....	T Physique (PCB).	M ^{me} HUREL-PY ..	T Biologie végét. (PCB).
FORTIER.....	T Mécanique Exp. des Fluides.	PIAUX.....	T Chimie (MPC).
DANJON.....	T Astronomie.	BRUN.....	T Mécanique théorique des fluides.
PETIT.....	T Biologie maritime.	LEDERER.....	T Chimie biolog.
QUENEY.....	T Météor. et dynamique atmosphérique.	M ^{me} DUBREIL.....	T Mathématiques (Agrég.).
GALLIEN.....	T Embryologie.	M ^{me} LELONG.....	T Mathématiques II (ENS).
EICHORN.....	T Botanique.	BELLAIR.....	T Géologie (SPCN).
DE CUGNAC.....	T Biologie Vég. (SPCN).	COTTE.....	T Physique électricité.
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T Chimie Physique.	DUBOIS J. E.....	T Chimie organique.
THELLIER.....	T Physique du globe.	LAMOTTE.....	T Zoologie (ENS).
L'HÉRITIER.....	T Biol. générale (Orsay).	MICHEL A.....	T Chimie minérale (Orsay).
GRIVET.....	T Radioélectricité (Orsay).	OLMER.....	T Énergétique générale.
PONCIN.....	T Mécanique générale.	ROCAULT.....	T Electricité (Orsay).
DUBREIL.....	T Arithm. et Théorie des Nombres.	GAUTHIER.....	T Mécanique appliquée.
QUELET.....	T Chimie organique.	BARCHIEWITZ.....	T Chimie Physique.
CAGNIARD.....	T Géophysique appliquée.	BROSSEL.....	T Physique atomique.
CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléc.	BUSER.....	T Physiologie comparée.
CUVILLIER.....	T Micropaléontologie.	CAMUS.....	T Physiologie Vég. BMPV.
JUNG.....	T Pétrographie.	CASTAING.....	T Physique II Thermod. Orsay.
TRILLAT.....	T Microscopie et diffraction électronique.	CURIEN.....	T Minéralo. et cristallog.
WIEMANN.....	T Chimie organ. et struct.	MOYSE.....	T Physiol. Végét. (Orsay).
JACQUINOT.....	T Spectroscopie et Phys. céleste (Orsay).	NOIROT.....	T Evolution des Êtres Org.
VASSY.....	T Physique de l'Atmosph.	PANNETIER.....	T Chimie générale.
DESTOUCHES.....	T Théories Physiques.	POSSOMPES.....	T Zoologie.
AMIEL.....	T Chimie générale.	PULLMANN.....	T Chimie quantique.
HOCART.....	T Minéralo. et Cristallo.	TEILLAC.....	T Physique Nucl. et Radioactivité.
J. P. MATHIEU.....	T Physique Optique.	TONNELAT.....	T Biol. Physicochim.
COUTEAUX.....	T Cytologie.	VILLE.....	T Économétrie.
MAY.....	T Zoologie (Orsay).	WILLEMART.....	T Chimie (PCB).
CHOQUET.....	T Théorie des fonctions et Topologie.	DODE.....	T Chimie (Orsay).
FELDMANN.....	T Biologie végét. marine.	FREYMAN.....	T Recherches Physiques.
GUINIER.....	T Physique des Solides (Orsay).	GUINCHET.....	T Biol. Vég. SPCN (Orsay).
JOST.....	T Physiologie comparée.	ROLLET.....	T Chimie minérale.
FORTET.....	T Calcul des Probabilités et Phys. mathém.	M ^{lle} JOSIEN.....	T Chimie SPCN.
SCHWARTZ.....	T Calcul diff. et Intégral.	CHEVALLEY.....	T Géométrie algéb. et théorie des groupes.
CHOUARD.....	T Physiologie végétale.	ARNOULT.....	T Electronique (Orsay).
MALAVARD.....	T Aviation (Tech. Aéron.).	CHAPELLE.....	T Physique (Orsay).
BRELOT.....	T Calcul diff. et Intégr.	DELANGE.....	T Mathématiques I (Orsay).
NORMANT.....	T Chimie organique.	DENY.....	T Mathématiques Gén. (Orsay).
BENARD.....	T Chimie minérale.	GERMAIN.....	T Mécanique théor. des fluides.
BUYAT.....	T Botanique (ENS).	LUCAS G.....	T Géologie.
DUGUE.....	T Statistiques Mathém.	ALLARD.....	T Chimie Physique.
SOULAIRAC.....	T Psychophysiologie.	BERTHELOT.....	T Phys. des particules Fond.
		BRICAT.....	T Météor. et Physique de l'Atmosphère.
		M ^{me} ALBE-FESSARD	T Psychophysiologie.

(suite de la dernière page)



A MONSIEUR LOUIS DE BROGLIE

En témoignage de respectueuse reconnaissance

A MA FEMME
A MES ENFANTS

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DE DIRAC ET THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION DE M^r L. DE BROGLIE

PAR

MUMM THIOUNN

INTRODUCTION

L'idée de cette thèse nous a été suggérée par M^r F. Fer ; elle a son origine dans la théorie de la double solution de M^r L. de Broglie et dans la thèse elle-même de M^r F. Fer entreprise sous la direction de M^r L. de Broglie sur les solutions singulières des équations d'onde scalaire de la mécanique ondulatoire. En effet, l'objet de notre travail consiste à trouver, pour les équations de Dirac, des solutions singulières ponctuelles et dont la singularité se déplace sur une trajectoire donnée à une vitesse également donnée puis, une fois les solutions obtenues, de voir pour quelles conditions le théorème du guidage de M^r L. de Broglie correspondant aux équations de Dirac peut être satisfait.

Pour cela nous avons tout d'abord essayé de généraliser la méthode, proposée par M^r F. Fer pour une équation d'onde scalaire, au système d'équations de Dirac dans le cas où le champ extérieur est nul et nous avons montré que pour une particule de masse nulle (cas du neutrino) la méthode conduit à des solutions (*C. r. Ac. Sc.*, t. **246**, 1958, p. 1673) ; mais dans le cas où la masse est différente de 0 la méthode conduit à une contradiction et, par suite, ne donne pas de solution. Pour ne pas alourdir notre exposé nous n'avons pas jugé utile de reproduire nos calculs infructueux dans la présente rédaction.

Ensuite nous avons trouvé deux systèmes d'équations du second ordre équivalents entre eux et équivalents séparément au système des équations de Dirac qui sont du premier ordre. Puis nous avons pu généraliser la méthode de M^r Hadamard pour une seule équation hyperbolique à un système de deux équations également hyperboliques à deux fonctions inconnues (système assez particulier il est vrai dans le cas qui nous occupe). Puis, nous basant sur ces principes, nous avons pu généraliser la méthode de M^r F. Fer pour la recherche des solutions singulières mobiles de ces équations.

Il existe donc, pour les équations de Dirac comme pour l'équation d'onde scalaire, des solutions singulières dont la singularité se déplace sur une trajectoire donnée à une vitesse également donnée. Ce fait paraît être en contradiction avec les conclusions de M^{rs} Hadamard et J. Leray. En effet dans le cas des équations d'onde scalaire par exemple, pour préciser les idées, ces mathématiciens ont

démontré que les solutions singulières doivent avoir leur singularité sur les surfaces caractéristiques et, par suite, ne peuvent se déplacer qu'à la vitesse de la lumière.

L'explication de cette apparente contradiction est très simple et, pour plus de clarté, soit l'équation

$$(E) \quad E(u) = \square u - 2iB^\sigma \partial_\sigma u - l u = 0.$$

M^{rs} Hadamard et Leray ont cherché des solutions de (E) dans la théorie des distributions, vérifiant (E) même au point singulier, alors que les solutions proposées par M^{rs} L. de Broglie et Fer, par exemple, vérifient (E) partout, sauf sur la trajectoire de la singularité elle-même ; autrement dit les solutions de M^{rs} L. de Broglie et Fer vérifient, en réalité, l'équation

$$(E') \quad E(u) = T,$$

où T est une certaine distribution dont le support est la ligne d'univers dans R^4 correspondant à la trajectoire donnée.

Il nous reste maintenant à voir si l'introduction de ce second membre est compatible avec la théorie de la double solution de M^r L. de Broglie et, en second lieu, si l'introduction de ce second membre est susceptible d'une interprétation physique.

a) Compatibilité avec la théorie de la double solution. Nous pensons que l'introduction de T n'entraîne aucune modification à la théorie de la double solution car, d'une part, M^r L. de Broglie suppose qu'aux environs de la singularité la fonction d'onde doit vérifier une autre équation que (E), d'autre part, dans chacune de ses démonstrations M^r L. de Broglie isole le point singulier à l'intérieur d'une petite surface et suppose que l'équation (E) est seulement vérifiée pour l'espace extérieur à cette surface.

b) Sens physique de la distribution T . Il est remarquable qu'en physique on est toujours amené à introduire une certaine distribution, soit de masse, soit d'électricité, au second membre des équations chaque fois qu'il y a effectivement une masse ou une charge électrique. En effet, le potentiel newtonien ou coulombien, par exemple, n'est une fonction harmonique qu'à l'extérieur des masses ou charges ; à leur intérieur il vérifie l'équation de Poisson. Autrement dit, ce potentiel vérifie l'équation de Laplace où le second membre, au lieu d'être nul, est une certaine distribution de masse ou de charge.

Un autre exemple, le potentiel retardé de Lorenz ne vérifie l'équation $\square u = 0$ qu'en dehors des charges ; en réalité, au sens des distributions, le potentiel de Lorenz ne vérifie pas l'équation ci-dessus mais celle où l'on aura remplacé le second membre par une certaine distribution, c'est-à-dire l'équation de Lorenz.

Si nous considérons les équations de Maxwell, nous savons que le champ électromagnétique est calculé à partir d'un potentiel-vecteur dont chaque composante vérifie l'équation ci-dessus en tout point extérieur à une charge ; nous savons, d'autre part, que les potentiels de Liénard-Wiechert de l'électron en mouvement sont des solutions, au sens des distributions, des équations ci-dessus avec, au second membre, une certaine distribution.

Enfin, les équations de Dirac, avec les corrections radiatives proposées par Schwinger, comportent également au second membre une distribution. Les solutions potentiels de ligne de M^r Fer sont également des solutions distributions des

équations d'onde scalaire avec au second membre une distribution.

Dans ce qui suit, nous ne nous occupons pas des formes exactes des seconds membres des équations que nous étudions. Il suffit de savoir qu'en dehors du point singulier, nos solutions satisfont aux équations homogènes.

Ceci étant, reprenons les calculs de Mr Hadamard concernant par exemple l'équation (E). Pour cela, admettons que (E) possède une solution de la forme

$$(1) \quad u = U F(h) + w,$$

où U , h et w sont des fonctions régulières au sens de Mr Hadamard, mais où la fonction F admet une singularité pour $h = 0$. Substituant cette expression (1) de u dans (E), il vient

$$(E'') \quad E(u) = U g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma h)^2 F''(h) + \\ + [g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma U \partial_\sigma h + (\square h - 2 i B^\sigma \partial_\sigma h) U] F'(h) + E(U) F(h) + E(w) = 0.$$

Si nous désirons que (E'') soit vérifiée aussi dans la théorie des distributions nous devons annuler les coefficients de $F(h)$ et de ses dérivées tout au moins pour $h = 0$. Alors en annulant le coefficient de $F'(h)$ pour $h = 0$,

$$(2) \quad g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma h)^2 = 0 \quad \text{pour } h = 0.$$

Nous pouvons donc conclure que la multiplicité $h = 0$ doit être une caractéristique. [Dans le cas où U est nul quand $h = 0$, il suffit de remplacer U par U/h^n avec un exposant n convenable pour que ce rapport soit différent de 0 pour $h = 0$, puis de remplacer $F(h)$ par $h^n F(h)$ et nous retrouvons les mêmes résultats.] Nous déduisons ensuite que les trajectoires possibles suivies par les singularités dans le cas des équations (E) ne peuvent être parcourues qu'à la vitesse de la lumière.

Nous voyons donc que les conclusions de Mr Hadamard sont rigoureuses et ne laissent aucune possibilité de trajectoires quelconques parcourues à des vitesses également quelconques par les singularités dans le cas des équations (E) ; mais il en est autrement du cas des équations (E'). En effet, nous pouvons profiter de la présence de la distribution T au second membre pour choisir F et h de telle sorte que nous ayons, par exemple,

$$(3) \quad g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma h)^2 F''(h) + \square h F'(h) = \square F(h) = T.$$

Il est alors visible que la multiplicité $h = 0$ n'est plus nécessairement une caractéristique. Par exemple, dans le système propre de la singularité nous pouvons prendre

$$(4) \quad T = -4\pi \delta(0), \quad h = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad F(h) = h^{-1/2},$$

où δ est la distribution de Dirac. Nous pouvons également prendre pour $F(h)$ soit le potentiel de Liénard-Wiechert, soit la distribution $1/D$ du potentiel de ligne de Mr Fer dans le cas d'une singularité ponctuelle. Il est ensuite facile de remplacer T par des distributions correspondantes.

Ainsi une fois choisies les fonctions F et h , (E'') devient

$$(E''') \quad [g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma U \partial_\sigma h - (2 i B^\sigma \partial_\sigma h) U] F'(h) + E(U) F(h) + E(w) = 0$$

et l'intégration de (E''') se fait sans aucune difficulté.

Ainsi se trouve complètement éclairci et démontré le fait que dans la théorie classique des fonctions, la même équation (E) comporte à la fois des solutions représentant des ondes se propageant à la vitesse de la lumière et des solutions singulières représentant des « particules » se déplaçant sur une trajectoire arbitraire à des vitesses également arbitraires.

Remarquons, en passant, que c'est la relation obtenue en égalisant à 0, pour $h = 0$, le coefficient de $F'(h)$ qui va nous permettre de démontrer le théorème du guidage de la théorie de la double solution.

Ainsi se trouve justifiée la méthode de résolution que nous avons utilisée dans les chapitres I et II. Puis, à la fin du chapitre II, nous avons montré la possibilité de satisfaire le théorème du guidage de M^r L. de Broglie dans le cas des équations de Dirac, en choisissant convenablement deux solutions singulières de ces équations.

Puis pour essayer de comprendre les significations profondes de ce théorème du guidage, nous avons, au chapitre III, étudié les lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes au vecteur-courant passant par ce point et cela aux environs du point singulier lui-même. Des résultats de cette étude nous avons élaboré une interprétation plus complète du théorème du guidage et, accessoirement, nous avons pu interpréter le fait que les valeurs propres des opérateurs représentant les composantes du vecteur-courant sont égales à c et le « tremblement de Schrödinger ».

Enfin au chapitre IV, en étudiant complètement les solutions singulières des équations de Dirac sans champ extérieur et en imposant à une certaine trajectoire d'être fermée, nous avons trouvé que la fréquence propre de la particule libre est égale à la fréquence de rotation d'un certain tore.

Avant de développer ces quelques résultats, je voudrais exprimer à M^r L. de Broglie ma profonde gratitude, non seulement pour l'intérêt qu'il a accordé à ces études, mais encore pour les conseils précieux qu'il m'a prodigués au cours de ces travaux.

I. Considérations sur le théorème du guidage de M^r L. de Broglie dans le cas de l'équation d'onde scalaire

1. Généralités et résultats fondamentaux. — Soit l'équation

$$(I.E) \quad \square u - 2i B^\sigma \partial_\sigma u - l u = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4 \text{ et } x^4 = t),$$

où $\square$ est le symbole d'Alembertien $(c^2 \partial_x^2 + c^2 \partial_y^2 + c^2 \partial_z^2 - (\partial_t)^2)$, B^σ et l sont des fonctions réelles des x^σ . Nous avons pris un système d'unités tel que la vitesse de la lumière c soit égale à l'unité. Nous désignons par des lettres grecques les indices susceptibles de varier de 1 à 4 et par des lettres latines minuscules les indices susceptibles de varier de 1 à 3. Nous utiliserons la notation des indices muets pour toute sommation par rapport à ces indices. Enfin, nous désignerons les coordonnées d'espace-temps soit par x, y, z, t , soit par $x^1, x^2, x^3, x^4 = t$, la métrique de cet espace-temps étant la métrique diagonale de la relativité restreinte 1, 1, 1, -1.

Dans ce qui suit nous résolvons les équations aux dérivées partielles dans la théorie classique des fonctions seulement ou, plus exactement d'après ce que nous avons vu dans l'introduction, nous cherchons des fonctions u vérifiant par exemple (I.E) partout, sauf peut-être sur une certaine courbe de dimension 1 de l'espace à quatre dimensions ; autrement dit, si nous considérons u comme une distribution,

elle vérifierait une équation où nous aurons remplacé dans (I. E) au second membre, 0 par une certaine distribution ayant pour support la courbe ci-dessus.

Ceci étant, posons

$$(I.1) \quad u = f e^{is},$$

où la phase S et ses dérivées premières ne présentent pas de singularités et où f est de la forme

$$(I.2) \quad f = F/D,$$

où F et ses dérivées premières sont des fonctions de x^σ ne présentant pas de singularités et ne s'annulant pas pour $D = 0$.

D'après (I.1) et (I.2) il est facile de voir que u présente une singularité pour tout point dont les coordonnées vérifient

$$(I.3) \quad D = 0.$$

Pour préciser D , nous nous donnons une trajectoire Γ et un point M décrivant cette trajectoire suivant une loi également donnée. Nous imposons à D d'être nulle en M à l'instant t . Alors il est évident que la fonction u donnée par les relations (I.1) et (I.2) présente une singularité mobile le long de la trajectoire suivant la loi $M(t)$.

Nous supposons, d'autre part, que D et ses dérivées premières ne présentent pas de singularité et nous montrerons qu'en outre D doit vérifier une certaine équation aux dérivées partielles.

Même avec toutes ces conditions, il reste encore une certaine indétermination dans le choix de D .

1. *Propriétés de D .* — Différentions D suivant M sur sa trajectoire Γ ; nous trouvons

$$(I.4) \quad \partial_\sigma D \, dx^\sigma = 0$$

ou, si nous désignons par v^σ les composantes de la vitesse de M ,

$$(I.4') \quad \partial_\sigma D \, v^\sigma = 0.$$

Puis nous démontrons que, pour une classe de fonctions D assez générales satisfaisant à

$$(I.5) \quad \square(1/D) = 0 \quad \text{ou} \quad \square(1/D) = A/D^2$$

du moins dans un domaine du complémentaire de Γ (rappelons encore une fois que nous nous plaçons uniquement au point de vue de la théorie classique des fonctions), si w^σ sont les composantes d'un certain vecteur $\vec{w}$, tel que nous ayons

$$(I.6) \quad \partial_\sigma D \, w^\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad D = 0,$$

nous pouvons conclure que

$$(I.7) \quad w^\sigma = \rho \, v^\sigma \quad \text{pour} \quad D = 0 \quad \text{ou pour tous les points de } \Gamma.$$

2. *Résolution de (I.E) et théorème du guidage.* — Si nous définissons u d'après (I.1), nous savons que (I.E) devient

$$(I.J) \quad f [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S)^2 - 2 B^\sigma \partial_\sigma S + 1] - \square f = 0,$$

$$(I.C) \quad 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S - B_\sigma) \partial_\sigma f + f \square S = 0.$$

Puis nous posons, D étant une des fonctions définies plus haut,

$$(I.8) \quad f = (1/D) (f_0 + f_1 D + f_2 D^2 + \dots + f_n D^n + \dots),$$

$$(I.9) \quad S = S_0 + S_1 D + S_2 D^2 + \dots + S_n D^n + \dots,$$

où les f_n et les S_n sont des fonctions régulières dans un domaine comprenant Γ .

En portant les développements ci-dessus dans (I.J) et (I.C), nous trouvons successivement :

terme en D^{-3} de (I.J),

$$(I.10) \quad f_0 \square(1/D) = A_{-2}/D^2$$

ou

$$(I.10') \quad f_0 [2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2 - D \square D] = A_{-2} D ;$$

terme en D^{-2} de l'équation (I.C),

$$(I.11) \quad -2 f_0 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D + f_0 S_1 [D \square D - 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2] = B_{-1} D ,$$

où A_{-2} et B_{-1} sont des fonctions régulières et, d'après (I.10'),

$$(I.11') \quad -2 f_0 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D = (S_1 A_{-2} + B_{-1}) D .$$

Par suite, au point $M(t)$ de Γ où $D = 0$ nous avons

$$(I.12) \quad [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D]_{M(t)} = 0 ;$$

donc, d'après les propriétés des fonctions D choisies,

$$(I.13) \quad (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma)_{M(t)} = \rho v_\sigma .$$

Cette relation (I.13) est donc une relation nécessaire et est en relation directe avec le théorème du guidage de Mr L. de Broglie. Enfin pour que les développements (I.8) et (I.9) soient valables, nous avons montré d'une part que les calculs des f_n et des S_n sont possibles et, d'autre part, que les séries en question sont convergentes (uniformément) au voisinage de $M(t)$.

3. *Remarques sur le théorème du guidage.* — Le théorème du guidage de Mr L. de Broglie stipule que nous devons avoir au point singulier $M(t)$ les relations suivantes :

$$(I.13') \quad (\partial_\sigma S - B_\sigma)_{M(t)} = \rho' v_\sigma ,$$

où S est la phase totale de la solution singulière donnée par (I.9), et (I.13') devient

$$(I.13'') \quad (\partial_\sigma S_0 + S_1 \partial_\sigma D - B_\sigma)_{M(t)} = \rho' v_\sigma ;$$

comparées aux relations (I.13) et (I.13'), elles comportent un terme en S_1 en plus et il est facile de montrer que les relations (I.13'') exigent que $S_1 = 0$ pour $D = 0$. En effet, multiplions les deux membres de (I.13'') par $g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D$:

$$(I.14) \quad [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D + S_1 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2]_{M(t)} = (\rho' g^{\sigma\sigma} v_\sigma \partial_\sigma D)_{M(t)} = 0 .$$

D'après (I.12), nous trouvons

$$(I.15) \quad [S_1 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2]_{M(t)} = 0 ,$$

ce qui entraîne

$$(I.15') \quad (S_1)_{M(t)} = 0 .$$

Ainsi le théorème du guidage de Mr L. de Broglie exige en général une condition, c'est la relation (I.15') ci-dessus.

D'autre part, si nous voulons que les dérivées secondes de la phase totale S soient finies, nous retrouvons la même condition (I.15'). Il est également facile de voir que dans les deux cas cette condition est aussi suffisante.

Nous pouvons donc conclure que si nous ne considérons que les solutions singulières dont les phases ainsi que leurs dérivées première et seconde sont finies, le théorème du guidage est alors une conséquence directe des équations (I.E) et réciproquement.

Dans ce qui suit nous appellerons guidage « fort » les solutions obéissant au théo-

tème du guidage de M^r L. de Broglie, c'est-à-dire aux relations (I.13') et nous appellerons guidage « faible » les solutions satisfaisant aux relations (I.13). D'après ce que nous venons de voir, les solutions singulières obéissent en général au théorème du guidage « faible » ; pour qu'elles obéissent au théorème du guidage « fort », il faut en outre une autre condition.

3. *Etude de certaines solutions.* — Nous démontrerons que les solutions potentiels de ligne de M^r Fer à singularité ponctuelle entrent dans la catégorie des solutions décrites ci-dessus. Par ailleurs, il est facile de voir que la condition obtenue par M^r Fer pour que ces solutions obéissent au guidage « fort » est justement l'équivalent de la relation (I.15'). Ces solutions obéissent naturellement au guidage « faible », même si la condition ci-dessus n'est pas satisfaite. D'autre part, M^r Fer a obtenu la même condition pour que les dérivées secondes soient finies.

Enfin par un calcul direct, nous avons démontré que les solutions

$$(I.16) \quad u_a = \frac{1}{D} [A \exp(D \sqrt{k^2 - k'^2}) + B \exp(-D \sqrt{k^2 - k'^2})] \times \\ \times \exp[(i k' / \sqrt{1 - v^2}) (t - z v)] \quad (k' \leq k),$$

avec $D = r' = \sqrt{x^2 + y^2 + [(z - v t)^2 / (1 - v^2)]}$ et

$$(I.16') \quad u_b = \frac{1}{D} [A \exp(i D \sqrt{k'^2 - k^2}) + B \exp(-i D \sqrt{k'^2 - k^2})] \times \\ \times \exp[(i k' / \sqrt{1 - v^2}) (t - z v)] \quad (k' > k)$$

entrent également dans la catégorie des solutions que nous venons d'étudier plus haut.

Dans les cas où $A = 0$ ou $B = 0$ ou encore A et B sont deux nombres complexes ayant le même argument, cas qui englobe les deux premiers, les solutions (I.16) obéissent au guidage « fort ». Dans les autres cas les solutions (I.16) n'obéissent qu'au guidage « faible ».

Les solutions (I.16') n'obéissent qu'au guidage « faible ».

Enfin il est facile de montrer, qu'une fois D choisi, la somme de deux solutions obéissant au guidage « faible » obéit également au guidage « faible ». Mais la proposition n'est plus valable dans le cas de deux solutions obéissant au guidage « fort ». Cependant, la somme de deux solutions obéissant au guidage « fort » obéit encore naturellement au guidage « faible ».

2. *Démonstration des résultats précédents.* — 1. *Propriétés de D.* — Nous supposons que D satisfait à l'une des équations (I.5), soit la première (les résultats ne sont pas différents dans les deux cas).

Puisque les équations de la mécanique ondulatoire sont invariantes dans une transformation de coordonnées, nous pouvons calculer D dans le système de coordonnées ayant pour origine le point $M(t)$ lui-même. D'autre part, comme il y a une certaine dyssymétrie entre les coordonnées d'espace et celle de temps, nous posons, par exemple,

$$(I.17) \quad D = D_1(t) D_2(x, y, z),$$

où $D_1(t)$ est une fonction non nulle de t et où D_2 est une fonction nulle seulement pour $x = y = z = 0$. (I.5) devient alors

$$(I.18) \quad \square(1/D) = (1/D_1) \Delta(1/D_2) - (1/D_2) [d^2(1/D_1)/dt^2] = 0$$

ou

$$(I.18') \quad \frac{\Delta(1/D_2)}{1/D_2} = \frac{d^2(1/D_1)/dt^2}{1/D_1} = \lambda,$$

où λ est une constante ; alors D_2 satisfait à l'équation

$$(I.18'') \quad \Delta(1/D_2) - \lambda (1/D_2) = 0 ;$$

de plus, nous devons avoir $D_2 = 0$ pour $x = y = z = 0$. Pour avoir une forme un peu plus précise de D_2 , nous posons

$$(I.19) \quad D_2 = [h(x, y, z)]^p,$$

où p est un nombre positif et h une fonction développable de la forme

$$(I.20) \quad h(x, y, z) = h_1(x, y, z) + h_2(x, y, z) + \dots + h_n(x, y, z) + \dots$$

où les h_n sont des polynômes de degré n . (I.18'') devient alors

$$(I.21) \quad p(p+1) \Delta_2 h - p h \Delta h = \lambda h^2 \quad [\Delta_2 = (\partial_x)^2 + (\partial_y)^2 + (\partial_z)^2].$$

Il est facile de vérifier que $h_1 = 0$. Pour calculer h_2 nous choisissons les axes de coordonnées tels que nous ayons

$$(I.22) \quad h_2 = a x^2 + b y^2 + c z^2 ;$$

(I.21) conduit alors aux équations

$$(I.23) \quad \begin{cases} (2p+1)a & -b & -c & = 0, \\ -a & + (2p+1)b & -c & = 0, \\ -a & -b & + (2p+1)c & = 0. \end{cases}$$

Pour que ce système admette des solutions autres que la solution nulle, il faut que

$$(I.23') \quad \begin{vmatrix} 2p+1 & -1 & -1 \\ -1 & 2p+1 & -1 \\ -1 & -1 & 2p+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous posons $2p+1 = q$, (I.23') devient $q^3 - 3q - 2 = 0$; cette équation admet la racine 2 et la racine double -1 . Mais comme p est positif, seule la racine 2 convient ; alors $p = 1/2$ et, par suite, $a = b = c$. Si p est différent de $1/2$, $a = b = c = 0$ et le développement de h commence par des termes du troisième ordre. Nous pouvons également vérifier que les développements ci-dessous commencent aussi par des termes du deuxième ordre :

$$(I.24) \quad D = [d(x, y, z)]^p,$$

avec $d(x, y, z) = d_1(x, y, z) + d_2(x, y, z) + \dots + d_n(x, y, z) + \dots$, où les d_n sont encore des polynômes homogènes de degré n en x , y et z mais dont les coefficients sont des fonctions de t , ou encore

$$(I.24') \quad D = [d(x, y, z)]^p f(x, y, z),$$

où d a la même signification que ci-dessus et f est une fonction non nulle à l'origine.

Des considérations ci-dessus nous voyons que la surface $D = 0$ présente en général un point conique en O ; par suite, après une transformation des coordonnées, la surface $D = 0$ présente un point conique en $M(t)$. Faisons immédiatement trois remarques.

a) Quoique la surface $D = 0$ présente un point conique en $M(t)$ les dérivées

premières de D n'y sont pas toutes nulles. Ce fait tient aux formes de développement de D qui ne sont pas des développements des fonctions analytiques.

b) h_2 et d_2 sont des formes elliptiques en x, y, z et par suite, pour t donné, la surface $D = a$, où a est une constante assez petite (dans l'espace à trois dimensions), est une surface du genre ellipsoïde, c'est-à-dire fermée ayant à son intérieur le point singulier. Ce fait est très important car, d'après la théorie de la double solution, pour démontrer le théorème du guidage il est nécessaire de supposer l'existence d'une telle petite surface fermée entourant le point singulier et sur laquelle la fonction d'onde ne présente pas de singularité.

c) Il est facile de voir que nous pouvons prendre pour $1/D$ une des fonctions harmoniques sphériques présentant une singularité à l'origine. Il est également facile de voir que toutes ces fonctions, sauf une, ne sont pas solutions distributions des équations (I.5) dans le sens que nous avons précisé plus haut.

THÉORÈME. D étant déterminé par les équations (I.4), (I.5) et par un des développements (I.17), (I.19), (I.24), (I.24'), soit w^σ les composantes d'un certain vecteur $\vec{w}$, telles que nous ayons au point $M(t)$ l'égalité (I.6); nous pouvons conclure qu'en $M(t)$ nous avons les relations (I.7).

En effet en $M(t)$ la surface $D = 0$ présente un point conique. Nous avons vu qu'en ce point, du fait que D n'est pas développable en série ordinaire, les dérivées premières n'y sont pas toutes nulles simultanément. Alors (I.4') montre que le cône des normales en $M(t)$ se réduit ici au plan à quatre dimensions de la relativité restreinte, perpendiculaire (au sens généralisé) au vecteur $\vec{v}$. Ce plan ne peut pas être dégénéré car les formes h_2 et d_2 par exemple, ne peuvent pas être des formes dégénérées.

Alors (I.6) montre que $\vec{w}$ en $M(t)$ est perpendiculaire (au sens généralisé) à toutes les normales à la surface $D = 0$ en ce point et, par suite, nous avons nécessairement les égalités (I.7), $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant perpendiculaires (au sens généralisé) à un même plan.

2. *Remarques sur les D .* — a) Si v est différent de c , il est nécessairement à l'intérieur du cône de lumière et, par suite, le vecteur de composantes $\partial_\sigma D$, que nous désignerons par $\vec{cD}$ et qui est conjugué de $\vec{v}$ par rapport à ce cône, est donc sur le plan conjugué de $\vec{v}$. Ce plan ne peut donc couper le cône et, par suite,

$$(I.25) \quad [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2]_{M(t)} \neq 0 \quad \text{pour } v \neq c.$$

Dans le cas où $v = c$, nous savons que $D = 0$ sont des surfaces caractéristiques de l'équation (I.E); alors

$$(I.25') \quad [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2]_{M(t)} = 0$$

et, d'après le théorème que nous venons de démontrer,

$$(I.26) \quad (\partial_\sigma D)_{M(t)} = \varphi'' v_\sigma.$$

b) Si D et ses dérivées premières ne présentent pas en général de singularité en M , les dérivées secondes de D en présentent en général une; en effet

$$\square(1/D) = (1/D^3) [2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2 - D \square D] = A/D^2,$$

d'où

$$(I.27) \quad \square D = (1/D) 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2 - A;$$

or nous venons de voir que pour $v \neq c$, le premier terme du second membre de (I.27) présente manifestement une singularité d'ordre $1/D$ pour $D = 0$.

c) Il est facile de montrer que les propriétés démontrées ci-dessus sont aussi vraies dans les cas suivants : $D = r$, r étant le rayon vecteur ; le potentiel de ligne de Mr Fer ; le potentiel de Liénart-Wiechert.

3. Résolution de l'équation (I.E) et théorème du guidage. — Les termes en D^{-2} de l'équation (I.J) sont

$$(I.28) \quad g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma f_0 \partial_\sigma D + A_{-2} = A_{-1} D.$$

Soit, par exemple, D choisi tel que nous ayons la première équation (I.5) par exemple : alors $A_{-2} = 0$. Alors (I.28) donne f_0 , puis (I.11') donne S_0 . Malgré la présence de D et de ses dérivées premières dans les équations, il est possible de choisir f_0 et S_0 régulières ; pour s'en rendre compte, il suffit par exemple de prendre $D = r$ et pour A_{-1} et B_{-1} des fonctions régulières quelconques.

Ceci étant, nous allons démontrer la validité des développements (I.8) et (I.9). Pour ne pas avoir à démontrer la convergence de deux séries, nous choisissons D , f_0 et S_0 comme indiqués ci-dessus et nous posons

$$(I.29) \quad u = (1/D) F e^{iS_0},$$

où

$$(I.30) \quad F = F_0 + F_1 D + \dots + F_n D^n + \dots$$

Ici les F_n ne sont pas nécessairement réels et il est facile d'établir les relations suivantes entre les F_n et les f_n , S_n :

$$(I.31) \quad \begin{aligned} F_0 &= f_0, & F_1 &= f_1 + i S_1 f_0, \\ F_2 &= f_2 + i S_1 f_1 + f_0 (i S_2 - \tfrac{1}{2} S_1^2), & \dots \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant (I.29) et le développement (I.30) dans (I.E) et faisons les calculs formels indiqués ; alors :

terme en D^{-3} ,

$$(I.32) \quad F_0 \square (1/D) ;$$

termes en D^{-2} ,

$$(I.33) \quad -2 g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D \partial_\sigma F_0 - 2 i F_0 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D ;$$

termes en D^{-1} ,

$$(I.34) \quad \square F_0 + 2 \times 1 \delta F_2 + a F_0 + 2 i (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma F_0 g^{\sigma\sigma} ;$$

termes en D^0 ,

$$(I.35) \quad \square F_1 + 3 \times 2 \delta F_3 + a F_1 + 2 i g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma F_1 + 2 g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_2 \partial_\sigma D ;$$

termes en D ,

$$(I.36) \quad \square F_2 + 4 \times 3 \delta F_4 + a F_2 + 2 i g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma F_2 + 2 \times 2 g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_3 \partial_\sigma D ;$$

termes en D^{n-2} ,

$$(I.37) \quad \square F_{n-1} + n(n+1) \delta F_{n+1} + a F_{n-1} + 2 i g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma F_{n-1} + 2(n-1) g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_n \partial_\sigma D,$$

où nous avons posé

$$(I.38) \quad a = k - g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma)^2 + i g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \quad \left(k = \frac{2\pi}{h} m_0 c \right)$$

et

$$(I.39) \quad \delta = g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2.$$

Si nous égalons à 0 les expressions (I.32) à (I.37), nous obtenons des équations qui nous permettent de calculer de proche en proche les F_n . Mais il semble que les F_n ainsi obtenus ne sont pas finis au point $M(t)$. En effet, (I.35) montre que F_3 est défini en fonction des dérivées premières de D ; ensuite (I.36) montre que F_4 est calculé en fonction des dérivées premières de F_3 et, par suite, en fonction des dérivées secondes de D ; or, nous savons que les dérivées secondes de D sont singulières en $M(t)$. Fait encore plus grave, F_5 est calculé en fonction de $\square F_3$, c'est-à-dire des dérivées secondes de F_3 et ainsi de suite.

Cependant il est possible de choisir les F_n réguliers en $M(t)$. En effet, prenons par exemple $D = r$, en nous plaçant dans le système propre de la singularité. Alors $D \hat{c}_1 D = x$ par exemple est fini ainsi que ses dérivées pour $r = 0$. Puis si nous égalons (I.34) à $2 D (g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_2 \partial_\sigma D)$, (I.35) à $2 D (g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_3 \partial_\sigma D)$, ..., (I.37) à $2 n D (g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_{n+1} \partial_\sigma D)$, il est facile de constater que, dans l'équation découlant de (I.35), le terme $2 g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_2 \partial_\sigma D$ disparaît et il apparaît un terme ne présentant pas de singularité au second membre; par suite, il ne reste plus de terme pouvant présenter des singularités pour déterminer F_3 . Puis, de proche en proche, nous pouvons constater que F_n peut être choisi régulier.

Donc admettons que, aux environs de $M(t)$, nous puissions limiter tous les termes de (I.37). Pour démontrer la convergence de (I.30), nous allons nous inspirer des calculs faits par Mr Hadamard dans son livre « Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques », p. 138 et suivantes.

Admettons que les coefficients de (I. E) soient holomorphes ou présentent toutes les conditions requises pour que, ρ étant la somme des valeurs absolues des x^σ , chaque coefficient de (I. E) admette (si α et r sont convenablement choisis) la majorante unique

$$(I.40) \quad \alpha/[1 - (\rho/r)],$$

de sorte que (le signe $\ll$ indiquant comme à l'ordinaire les fonctions majorées) si l'on a

$$(I.41) \quad w \ll K/[1 - (\rho/r)]^n,$$

on aura aussi

$$(I.42) \quad \mathcal{F}(w) = [\square + 2 \mathbf{i} g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma + a] w \ll \frac{\alpha' K n (n+1)}{[1 - (\rho/r)]^{n+2}},$$

avec $\alpha' = 1 + (4/r) + (4/r^2)$ et en supposant que $\partial_\sigma S_0 - B_\sigma$ et a admettent la même majorante (I.40), ce qui est possible avec notre choix de S_0 . Nous égalons d'autre part les expressions (I.32) à (I.37) à 0. Les autres cas se traitent de la même manière.

Ceci étant, (I.37) devient

$$(I.37') \quad n(n+1) \delta F_{n+1} = -2(n-1) g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_n \partial_\sigma D - \mathcal{F}(F_{n-1}).$$

Nous allons démontrer que, si

$$F_{n-1} \ll K_{n-1}/[1 - (\rho/r)]^{n-1} \quad \text{et} \quad F_n \ll K_n/[1 - (\rho/r)]^n,$$

nous avons aussi $F_{n+1} \ll K_{n+1}/[1 - (\rho/r)]^{n+1}$. En effet, soit γ une constante majorante des $\partial_\sigma D$ ($\partial_\sigma D \ll \gamma$); alors, d'après (I.37'), nous avons

$$F_{n+1} \ll \frac{1}{\delta n (n+1)} \left\{ \frac{2 n (n-1) K_n \gamma'}{[1 - (\rho/r)]^{n+1}} + \frac{\alpha' n (n+1) K_{n-1}}{[1 - (\rho/r)]^{n+1}} \right\},$$

avec $\gamma' = 4 \gamma/r$ et nous trouvons

$$(I.43) \quad K_{n+1} = \frac{1}{\delta n (n+1)} [2 n (n-1) \gamma' K_n + \alpha' n (n+1) K_{n-1}].$$

Nous remarquons que dans (I.43) les coefficients de K_n et K_{n-1} tendent vers des limites finies quand n tend vers ∞ : nous pouvons donc les majorer par une même constante b . Soit donc à étudier la convergence de la série de terme général

$$(I.44) \quad U_{n+1} = V_{n+1} \frac{D^{n-1}}{[1 - (\rho/r)]^{n+1}} = b (V_n + V_{n-1}) \frac{D^{n-1}}{[1 - (\rho/r)]^{n+1}}.$$

Pour démontrer la convergence de la série U_n , étudions si le rapport V_{n-1}/V_n tend vers une limite finie. Pour cela nous pouvons supposer que $V_0 = V_1 = 1$. Si $b = 1/2$, il est facile de voir que $V_2 = 1, \dots, V_n = 1$ et V_{n+1}/V_n est égal à 1. Si b est différent de $1/2$, soit par exemple supérieur à $1/2$ (dans le cas contraire, il est facile de vérifier que V_n est majoré par 1), posons $a_n = V_n/V_{n-1}$. Nous constatons, en calculant les premiers termes de cette suite, que les termes d'ordre impair sont monotones, croissants et bornés par $2b$ et que les termes d'ordre pair sont monotones, décroissants et bornés inférieurement par 1. En effet, raisonnons par récurrence et soit

$$(I.45) \quad a_{2n-3} < a_{2n-1} < 2b, \quad a_{2n-2} > a_{2n} > 1;$$

d'autre part, par définition, $a_{n+1} = b [1 + (1/a_n)]$; d'où

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = b [(1/a_{2n}) - (1/a_{2n-2})] > 0$$

$$\text{et } a_{2n+1} = b [1 + (1/a_{2n})] < b (1 + 1) = 2b.$$

Donc les termes impairs ont une limite x et les termes pairs ont une limite y : il est facile de voir que $x = y = L$ et que cette limite est

$$L = \frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 + 4b}).$$

Nous vérifions immédiatement que pour $b = 1/2$, $L = 1$ et pour $b < 1/2$, L représente encore la limite de a_n .

Nous sommes enfin assuré de la convergence de la série (I.30)

$$(I.45') \quad |D| < (1/L) [1 - (\rho/r)].$$

Ainsi l'existence du développement de F est complètement démontrée et nous pouvons même conclure que la convergence de la série (I.30) est uniforme quand le point de coordonnées x, y, z se trouve aux environs de $M(t)$.

4. Solutions potentiels de ligne de M^r Fer. — Pour les notations nous renvoyons à la thèse de M^r Fer. Ici

$$(I.46) \quad D = \rho (1 - v_\rho)$$

et soit

$$(I.47) \quad \tau = t - \rho.$$

Nous vérifions que $\square(1/D) = 0$. Ceci étant, M^r Fer a trouvé pour l'équation (I.E) la solution

$$(I.48) \quad u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau) u[x^\sigma, \alpha^1(\tau), \tau]}{D} - 2 \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) u[x^\sigma, a(\theta)] d\theta.$$

Dans le cas d'une singularité immobile en O , nous avons

$$(I.49) \quad D = r \quad \text{et} \quad \tau = t - r = t - D.$$

Il est alors facile de voir que (I.48) peut être développé suivant les puissances croissantes de D .

Dans le cas général, nous écrivons plus explicitement

$$(I.46') \quad D = \rho - [x^1 - \alpha^1(\tau)] v_i(\tau) = \rho - [x^1 - \alpha^1(t - \rho)] v_i(t - \rho).$$

Nous voyons donc que D est une fonction de ρ et en étudiant de plus près la dérivée de D par rapport à ρ , en considérant les x^σ comme des paramètres, nous pouvons voir qu'il est possible de considérer ρ comme une fonction de D et, par suite, d'écrire

$$(I.50) \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 D + \dots + \rho_n D^n + \dots$$

Ensuite (I.47) devient

$$(I.47') \quad \tau = t - \rho_0 - \rho_1 D - \dots - \rho_n D^n - \dots$$

et nous posons

$$(I.51) \quad \tau_0 = t - \rho_0.$$

Comme (I.48) est fonction de τ , d'après (I.47') ces solutions peuvent être développées suivant les puissances de D .

Si nous calculons les dérivées partielles de τ_0 en $M(t)$,

$$(I.52) \quad (\partial_j \tau_0)_{M(t)} = -v_j/(1 - v^2), \quad (\partial_4 \tau_0)_{M(t)} = 1/(1 - v^2),$$

les v_j et v^2 étant pris au temps t . Nous avons une autre manière de retrouver (I.52); en effet, si nous calculons $\partial_\sigma \tau$ en $M(t)$ d'après (I.47'), nous trouvons

$$(I.53) \quad [\partial_\sigma(\tau)]_{M(t)} = (\partial_\sigma \tau_0)_{M(t)} - (\rho_1 \partial_\sigma D)_{M(t)};$$

or, d'après les calculs de M^r Fer (thèse, p. 93),

$$(\partial_j \tau)_{M(t)} = \left\{ \left[-v_j/(1 - v^2) \right] - [(\partial_j D)/(1 - v^2)] \right\}_{M(t)},$$

$$(\partial_4 \tau)_{M(t)} = \left\{ \left[1/(1 - v^2) \right] - [(\partial_4 D)/(1 - v^2)] \right\}_{M(t)}.$$

Une identification avec (I.53) nous permet de retrouver facilement (I.52). Enfin prenons un exemple simple, le cas où la courbe Γ est l'axe Oz et où M parcourt Oz à une vitesse uniforme v . Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \tau = v \tau = v(t - \rho)$ et $D = -v(z - vt) + (1 - v^2)$, d'où

$$\tau = t - \rho = t - [v(z - vt)/(1 - v^2)] - [D/(1 - v^2)],$$

$$\tau_0 = t - [v(z - vt)/(1 - v^2)] = (t - zv)/(1 - v^2)$$

et nous retrouvons

$$\partial_1 \tau_0 = \partial_2 \tau_0 = 0, \quad \partial_3 \tau_0 = -v/(1 - v^2), \quad \partial_4 \tau_0 = 1/(1 - v^2).$$

Revenons maintenant à la solution (I.48) et posons $\omega(\tau) = \Omega(\tau) e^{K(\tau)}$; un calcul rapide montre alors qu'ici nous avons

$$S_0 = \zeta(\tau_0) + \int_{\alpha(\tau_0)}^x B_\sigma(\xi^\sigma) d\xi^\sigma$$

et en $M(t)$ nous trouvons

$$(I.54) \quad (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma)_{M(t)} = P(t) (\partial_\sigma \tau_0)_{M(t)} = P(t) (-v_\sigma)/(1 - v^2),$$

avec $P(t) = \zeta'(t) - B^\sigma v_\sigma(t)$, où $\zeta'(t) = d[\zeta(t)]/dt$; or les calculs de M^r Fer ont donné

$$(I.54') \quad (\partial_\sigma S - B_\sigma)_{M(t)} = [P(t) (-v)/(1 - v^2)] - \\ - [1/(1 - v^2)] [P(t) + (1 - v^2) K(t)] \partial_\sigma D,$$

D'autre part, d'après (I.9), $(\dot{\epsilon}_\sigma S - B_\sigma)_{M(t)} = (\dot{\epsilon}_\sigma S_0 - B_\sigma)_{M(t)} = (S_1 \dot{\epsilon}_\sigma D)_{M(t)}$ et, en comparant à (I.54'), nous retrouvons (I.54) ; de plus,

$$(I.55) \quad (S_1)_{M(t)} = [-1/(1-v^2)] [P(t) + (1-v^2) K(t)].$$

Il est facile de vérifier que cette dernière expression évalée à 0 n'est autre que l'équation intégrodifférentielle de M^r Fer, condition pour que les solutions potentiels de ligne obéissent au guidage « fort ». Nous trouvons bien l'équation (I.15').

De plus, montrons que la même condition (I.15') est nécessaire pour que les dérivées secondes de la phase S soient finies. En effet,

$$\partial_{\sigma\sigma}^2 S = S_1 \partial_{\sigma\sigma}^2 D + \partial_{\sigma\sigma}^2 S_0 + \partial_\sigma S_1 \partial_\sigma D + \partial_\sigma D \partial_\sigma S_1 + 2 D S_2 \partial_{\sigma\sigma}^2 D + \dots$$

Comme les dérivées secondes de D sont singulières pour $D = 0$ il faut donc et il suffit que $S_1 = 0$ en $M(t)$, c'est-à-dire que nous retrouvons bien l'équation (I.15').

Nous pouvons aussi conclure que le guidage « fort » de M^r L. de Broglie est satisfait pour toute solution singulière de type pôle ayant les dérivées secondes de la phase finies au point singulier.

5. Solutions de l'équation $\square u - k^2 u = 0$. — M^r L. de Broglie a donné comme solutions singulières de cette équation, les expressions (I.16) et (I.16'). M^r Fer a démontré que ces deux solutions sont des potentiels de ligne, mais seule la première satisfait, pour A et B ayant le même argument, à la condition (I.15') et, par suite, satisfait au guidage fort. Nous allons retrouver les mêmes résultats en nous plaçant à notre point de vue.

En effet, pour la première solution,

$$(I.56) \quad S_a = (k'/\sqrt{1-v^2}) (t - zv)$$

et $S_{1,a} = S_{2,a} = \dots = S_{n,a} = \dots = 0$.

Pour la deuxième solution,

$$(I.56') \quad S_b = [k'(t - zv)/\sqrt{1-v^2}] \pm r' \sqrt{k'^2 - k^2};$$

donc ici $(S_{1,b})_{M(t)} = \pm \sqrt{k'^2 - k^2}$ est différent de 0.

Nous allons maintenant montrer que notre méthode va nous permettre de retrouver directement ces résultats. En effet, ici $D = r'$ et nous prenons pour S_0 , $S_0 = k'(t - zv)/\sqrt{1-v^2}$; nous vérifions immédiatement que ces choix de D et S_0 satisfont bien aux équations (I.10) et (I.11') avec $A_{-2} = B_{-1} = 0$. Puis, (I.38) et (I.39) deviennent $a = k'^2 - k^2$ et $\delta = g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2 = 1$. Il suffit ensuite de prendre $F_0 = A = \text{Cte}$ et $F_1 = A \pm \sqrt{-a}$. Alors les équations (I.34) et suivantes donnent $F = A \exp(\pm \sqrt{-a} r')$ et nous retrouvons bien les solutions ci-dessus.

3. Conclusion. — La méthode que nous préconisons pour la recherche des solutions à singularité mobile est générale et elle peut probablement nous conduire à des solutions singulières en partant d'autres équations linéaires ou non. Elle nous permet d'étudier la propriété de ces solutions aux environs du point singulier sans aucune difficulté.

II. Etudes sur le théorème du guidage dans le cas des équations de Dirac

1. **Généralités et résultats fondamentaux.** — Soit les équations de Dirac écrites sous la forme

$$(II. E) \quad \begin{aligned} (e_1) \quad k \psi_1 &= (P_1 + i P_2) \psi_3 - (P_3 - P_4) \psi_4, \\ (e_2) \quad k \psi_2 &= -(P_1 - i P_2) \psi_4 - (P_3 + P_4) \psi_3, \\ (e_3) \quad k \psi_3 &= (P_1 - i P_2) \psi_1 - (P_3 - P_4) \psi_2, \\ (e_4) \quad k \psi_4 &= -(P_1 + i P_2) \psi_2 - (P_3 + P_4) \psi_1, \end{aligned}$$

où $k = (2 \pi / h) m_0 c$ et ici $c = 1$. D'autre part, nous avons posé

$$(II. I) \quad P_\sigma = \partial_\sigma - i B_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

avec

$$(II. 2) \quad B_j = (2 \pi e / h) A_j, \quad B_4 = -(2 \pi e / h) V,$$

où les A_j sont les composantes du potentiel-vecteur et V le potentiel scalaire du champ électromagnétique. Il est alors facile de voir que les matrices de Dirac ont ici pour valeurs

$$(II. 3) \quad \begin{aligned} \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \gamma^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et nous pouvons écrire (II. E) sous la forme condensée suivante :

$$(II. E_1) \quad (\gamma^\sigma P_\sigma - k) \psi = 0$$

où ψ représente la matrice colonne

$$(II. 4) \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}.$$

Ceci étant nous démontrons (nous ne revenons pas sur ce que nous avons dit sur les solutions distributions) que le système (II. E) est rigoureusement équivalent à l'un des deux systèmes (II. E') et (II. E'') ci-dessous en ce qui concerne la recherche des solutions singulières mobiles ou des solutions régulières :

$$(II. E') \quad \begin{cases} k^2 \psi_1 = [(P_1 + i P_2) (P_1 - i P_2) + (P_3 - P_4) (P_3 + P_4)] \psi_1 + \\ \quad + [(P_3 - P_4) (P_1 + i P_2) - (P_1 + i P_2) (P_3 - P_4)] \psi_2, \\ k^2 \psi_2 = [(P_1 - i P_2) (P_1 + i P_2) + (P_3 + P_4) (P_3 - P_4)] \psi_2 + \\ \quad + [(P_1 - i P_2) (P_3 + P_4) - (P_3 + P_4) (P_1 - i P_2)] \psi_1, \\ k \psi_3 = (P_1 - i P_2) \psi_1 - (P_3 - P_4) \psi_2, \\ k \psi_4 = -(P_1 + i P_2) \psi_2 - (P_3 + P_4) \psi_1; \end{cases}$$

$$(II.E'') \quad \begin{cases} k \psi_1 = (P_1 + i P_2) \psi_3 - (P_3 - P_4) \psi_4, \\ k \psi_2 = -(P_1 - i P_2) \psi_4 - (P_3 + P_4) \psi_3, \\ k^2 \psi_3 = [(P_1 - i P_2)(P_1 + i P_2) + (P_3 - P_4)(P_3 + P_4)] \psi_3 - \\ \quad + [(P_3 - P_4)(P_1 - i P_2) - (P_1 - i P_2)(P_3 - P_4)] \psi_4, \\ k^2 \psi_4 = [(P_1 + i P_2)(P_1 - i P_2) + (P_3 + P_4)(P_3 - P_4)] \psi_4 + \\ \quad + [(P_1 + i P_2)(P_3 + P_4) - (P_3 + P_4)(P_1 + i P_2)] \psi_3. \end{cases}$$

La résolution des systèmes (II.E') et (II.E'') revient à résoudre un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux fonctions inconnues. En effet, pour résoudre (II.E') par exemple, il suffit de résoudre le système formé par les deux premières équations, ce qui donne ψ_1 et ψ_2 , puis les deux dernières équations donnent ψ_3 et ψ_4 sans autre intégration.

Ecrivons plus explicitement le système formé par les deux premières équations de (II.E') et le système formé par les deux dernières équations de (II.E') :

$$(II.E'_{12}) \quad \begin{aligned} & (\square - 2i B^\sigma \partial_\sigma - 1) \psi_1 - (H_3 + i E_3) \psi_1 + \\ & \quad + [E_2 - H_1 - i(E_1 + H_2)] \psi_2 = 0, \\ & (\square - 2i B^\sigma \partial_\sigma - 1) \psi_2 + (H_3 + i E_3) \psi_2 + \\ & \quad + [-(E_2 + H_1) + i(H_2 - E_1)] \psi_1 = 0; \\ (II.E''_{34}) \quad & (\square - 2i B^\sigma \partial_\sigma - 1) \psi_3 + (H_3 - i E_3) \psi_3 + \\ & \quad + [H_1 - E_2 - i(E_1 + H_2)] \psi_4 = 0, \\ & (\square - 2i B^\sigma \partial_\sigma - 1) \psi_4 - (H_3 - i E_3) \psi_4 + \\ & \quad + [H_1 + E_2 + i(H_2 - E_1)] \psi_3 = 0. \end{aligned}$$

Soit u_1, u_2 une solution du système (II.E'_{12}) et u_3, u_4 une solution du système (II.E''_{34}) ; si nous désignons par U une des expressions u, u', u'' ci-dessous,

$$(II.5) \quad u' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad u = u' + u'' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.$$

nous montrons que toute solution du système (II.E) peut être mise sous la forme

$$(II.6) \quad \psi = [\gamma^\sigma P_\sigma + k] U.$$

1. Résolution des systèmes (II.E'_{12}) et (II.E''_{34}). — Etant donné la forme très particulière des systèmes ci-dessus, il est possible de généraliser la méthode de M^r Hadamard pour la résolution du problème de Cauchy ou du problème de Beudon concernant les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et nous pouvons résoudre le problème de Cauchy ou le problème de Beudon concernant l'un des deux systèmes ci-dessus, ce qui permet, en particulier, de trouver des solutions potentiels de ligne analogues à celles trouvées par M^r Fer pour les équations d'onde scalaire ; mais nous n'utilisons pas cette méthode car elle ne nous permet pas de déterminer clairement les propriétés générales des solutions singulières à singularité ponctuelle mobile ; nous adopterons donc la méthode qui nous a si bien réussi au chapitre précédent.

Résolvons, par exemple, le système (II.E'_{12}) par cette méthode ; pour cela nous commençons par déterminer une certaine quantité scalaire D identique à celle du

chapitre précédent et liée au mouvement d'un point $M(t)$ mobile sur une trajectoire donnée Γ .

Nous posons alors

$$(II.7) \quad u_j = (1/D) f_j e^{iS_j} \quad (j = 1, 2),$$

avec

$$(II.8) \quad f_j = f_0 + f_1 D + f_2 D^2 + \dots + f_n D^n + \dots,$$

$$S_j = S_0 + S_1 D + S_2 D^2 + \dots + S_n D^n + \dots$$

Puis nous remplaçons formellement les valeurs de u_j données par les développements (II.7) et (II.8) dans les équations du système (II.E'12) et nous trouvons les conditions

$$(II.9) \quad \square(1/D) = 0$$

et

$$(II.10) \quad (\partial_\sigma S_{j0} - B_\sigma)_{M(t)} = \rho_j v.$$

Donc chaque fonction u_j obéit à un théorème de guidage « faible » analogue à celui concernant la fonction d'onde scalaire. Les équations du système (II.E'12) n'en imposent pas d'autre. La démonstration de la convergence des séries (II.8) ne présente aucune difficulté.

Un raisonnement identique conduit aux mêmes résultats en ce qui concerne le système (II.E'34) et les fonctions u_3 et u_4 .

D'autre part, nous savons que si nous désignons par

$$(II.11) \quad j^\sigma = -\psi^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \psi$$

les composantes du vecteur-courant de Dirac, elles obéissent à l'équation de continuité

$$(II.12) \quad \partial_\sigma j^\sigma = 0.$$

Or nous savons que les solutions des équations de Dirac sont données par les expressions (II.6) et, puisque l'équation de continuité est une conséquence directe des équations de Dirac, les composantes du vecteur-courant de Dirac, construites avec les solutions (II.6), doivent vérifier identiquement l'équation (II.12) et, par suite, (II.12) n'impose aucune nouvelle condition aux développements (II.8).

Donc le théorème du guidage de M^r L. de Broglie, qui est une conséquence directe des équations dans le cas des équations d'onde scalaire, ne l'est pas du tout dans le cas des équations d'onde spinorielle. Rappelons que, dans ce dernier cas, M^r L. de Broglie a proposé comme théorème du guidage les égalités.

$$(II.13) \quad j^\sigma = \rho v^\sigma \quad \text{au point singulier.}$$

2. *Etudes du théorème du guidage de M^r L. de Broglie.* — Nous venons de voir que ce théorème (II.13) n'est pas une conséquence directe des équations de Dirac.

Dans ce qui suit, nous désignerons par ψ' et par ψ'' des solutions des systèmes (II.E') et (II.E'') respectivement; nous constatons immédiatement que la solution ψ' comporte une singularité du second ordre pour ψ'_3 et ψ'_4 et une singularité du premier ordre pour ψ'_1 et ψ'_2 et, par contre, la solution ψ'' comporte une singularité du second ordre pour ψ''_1 et ψ''_2 et une singularité du premier ordre pour ψ''_3 et ψ''_4 .

Puisque les équations de Dirac sont linéaires, pour obtenir une solution comportant une singularité du second ordre pour ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 , il suffit d'additionner les solutions ψ' et ψ'' ; cette nouvelle solution est désignée par $\psi = \psi' + \psi''$.

Par ailleurs nous démontrerons qu'il n'est pas possible d'avoir une solution uniformément du premier ordre à la fois pour $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$.

Ceci étant, nous démontrerons que le vecteur-courant de Dirac construit à partir de la solution ψ' ou ψ'' se trouve sur le cône de lumière au point singulier et, par suite, le théorème du guidage de M^r L. de Broglie ne peut pas être vérifié.

Mais le vecteur-courant construit à partir des solutions $\psi = \psi' + \psi''$ ne se trouve pas nécessairement sur le cône de lumière au point singulier et nous démontrerons qu'à toute solution ψ' nous pouvons faire correspondre une solution ψ'' telle que le théorème du guidage de M^r L. de Broglie soit vérifié et inversement à toute solution ψ'' nous pouvons faire correspondre une solution ψ' ayant cette propriété.

2. Démonstrations. — 1. Equivalence des systèmes (II.E), (II.E') et (II.E''). —

Les équations de Dirac étant des équations aux dérivées partielles du premier ordre, aucune condition n'est imposée quant à l'existence des dérivées secondes des fonctions inconnues. Mais si nous supposons que, dans le domaine d'existence des fonctions inconnues, celles-ci et leurs dérivées premières et secondes existent et présentent tout au plus des discontinuités ou des singularités sur un ensemble de points, de telle sorte qu'il est possible d'isoler cet ensemble de points par une ou plusieurs surfaces (à quatre dimensions) fermées contenant ces points à leurs intérieurs, en enlevant les volumes intérieurs aux surfaces ci-dessus du domaine d'existence nous pouvons définir un domaine connexe dans lequel les fonctions inconnues et leurs dérivées premières et secondes sont définies et régulières.

Les conditions ci-dessus sont plus restrictives que celles imposées par les seules équations de Dirac, mais elles sont en général remplies par les solutions régulières considérées jusqu'à présent par les divers auteurs et aussi par les solutions à singularités ponctuelles mobiles le long de certaines trajectoires, ces singularités étant du type pôle par exemple.

Ceci étant, il est possible de dériver terme à terme les deux membres des quatre équations (II.E).

Portons alors les valeurs de ψ_3 et ψ_4 données par les équations (e₃) et (e₄) du système (II.E) dans les équations (e₁) et (e₂), nous obtenons le système (II.E'); donc le système (II.E') est une conséquence du système (II.E); une démonstration analogue montre que (II.E'') est une conséquence de (II.E).

Pour achever de démontrer l'équivalence complète entre les systèmes (II.E) et (II.E') par exemple, il suffit de montrer que le système (II.E) est une conséquence du système (II.E').

Pour cela, nous constatons tout d'abord que les deux dernières équations (II.E) et (II.E') sont identiques. Puis si nous calculons $(P_1 + iP_2)k\psi_3 - (P_3 - P_4)k\psi_4$, $-(P_1 - iP_2)k\psi_4 - (P_3 + P_4)k\psi_3$ et portons les valeurs de ψ_3 et ψ_4 données par les deux dernières équations (II.E') dans ces quantités, en comparant les expressions obtenues aux deux premières équations (II.E') nous obtenons, par exemple, $k^2\psi_1 = (P_1 + iP_2)k\psi_3 - (P_3 - P_4)k\psi_4$, c'est-à-dire au facteur k près la pre-

mière équation (II. E) ; de même, il est facile d'obtenir la deuxième équation (II. E) à partir de (II. E').

Il y a donc équivalence complète entre les systèmes (II. E) et (II. E') ; de même, il y a équivalence complète entre les systèmes (II. E) et (II. E''), du moins avec les restrictions énoncées au début du paragraphe.

Il est évident que les systèmes (II. E') et (II. E'') sont équivalents entre eux, d'après ce que nous venons de voir ; mais nous allons le démontrer directement quand même, car les deux systèmes présentent une certaine différence en ce qui concerne les solutions à singularité de type pôle. Pour cela nous allons écrire (II. E) sous la forme

$$(II. E) \quad \begin{aligned} (e_1) \quad k \psi_1 &= A\psi_3 + B\psi_4, \\ (e_2) \quad k \psi_2 &= C\psi_3 + D\psi_4, \\ (e_3) \quad k \psi_3 &= a\psi_1 + b\psi_2, \\ (e_4) \quad k \psi_4 &= c\psi_1 + d\psi_2, \end{aligned}$$

où A, B, C, D, a, b, c, d sont des opérateurs facilement identifiables, par exemple $A = P_1 + i P_2$.

Nous pouvons alors écrire (II. E') sous la forme

$$(II. E') \quad \begin{aligned} (e'_1) \quad k^2 \psi_1 &= A(a\psi_1 + b\psi_2) + B(c\psi_1 + d\psi_2), \\ (e'_2) \quad k^2 \psi_2 &= C(a\psi_1 + b\psi_2) + D(c\psi_1 + d\psi_2), \\ (e'_3) \quad k \psi_3 &= a\psi_1 + b\psi_2, \\ (e'_4) \quad k \psi_4 &= c\psi_1 + d\psi_2. \end{aligned}$$

Nous allons déduire le système (II. E'') du système (II. E') ci-dessus ; en effet, des deux équations (e'_1) et (e'_2) nous déduisons

$$k^2 (a\psi_1 + b\psi_2) = (aA + bC)(a\psi_1 + b\psi_2) + (aB + bD)(c\psi_1 + d\psi_2),$$

$$k^2 (c\psi_1 + d\psi_2) = (cA + dC)(a\psi_1 + b\psi_2) + (cB + dD)(c\psi_1 + d\psi_2)$$

qui, comparées à (e'_3) et (e'_4) , donnent

$$k^2 \psi_3 = (aA + bC)\psi_3 + (aB + bD)\psi_4, \quad k^2 \psi_4 = (cA + dC)\psi_3 + (cB + dD)\psi_4,$$

d'où

$$k^2 \psi_3 = a(A\psi_3 + B\psi_4) + b(C\psi_3 + D\psi_4), \quad k^2 \psi_4 = c(A\psi_3 + B\psi_4) + d(C\psi_3 + D\psi_4);$$

ces deux dernières équations ne sont autres que les deux dernières équations du système (II. E').

Enfin, en comparant (e'_1) et (e'_2) d'une part, (e'_3) et (e'_4) d'autre part nous trouvons

$$k \psi_1 = A\psi_3 + B\psi_4, \quad k \psi_2 = C\psi_3 + D\psi_4,$$

qui ne sont autres que les deux premières équations (II. E').

Remarquons que le raisonnement ci-dessus n'est possible que si k est différent de 0. D'ailleurs il est visible que si $k = 0$ les systèmes (II. E), (II. E') et (II. E'') ne sont plus équivalents ; cependant nous allons voir dans le paragraphe suivant que certains résultats sont conservés même quand $k = 0$.

2. Principe de résolution des systèmes (II. E), (II. E') et (II. E''). — Résolvons par exemple le système (II. E') ; nous voyons que (e'_1) et (e'_2) forment un système de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues, du second ordre, linéaires, hyperboliques normales. Si nous savons le résoudre et si u_1 et u_2 sont les deux fonctions inconnues, nous prenons $\psi'_1 = k u_1$ et $\psi'_2 = k u_2$. Il est

alors visible que les équations (e'_3) et (e'_4) donnent les valeurs de ψ'_3 et ψ'_4 sans autre intégration.

De la même manière nous voyons que les équations (e''_3) et (e''_4) du système (II. E'') donnent par intégration les fonctions u_3 et u_4 ; nous prenons ensuite $\psi''_3 = k u_3$, $\psi''_4 = k u_4$ et les équations (e'_1) et (e'_2) donnent les valeurs correspondantes de ψ'_1 et ψ'_2 .

Les deux solutions ci-dessus sont naturellement des solutions du système (II. E); comme, d'autre part, le système (II. E) est un système linéaire, la somme des deux solutions ci-dessus est aussi solution de (II. E). Nous pouvons donc écrire comme suit la forme générale des solutions de (II. E). Soit U une des quantités (II. 5). Si nous remplaçons cette quantité dans les équations (II. E) écrites sous la forme matricielle (II. E₁) nous trouvons

$$(II. F) \quad (\gamma^\sigma P_\sigma - k) (\gamma^\sigma P_\sigma + k) U = 0.$$

Dans le cas où $U = u'$ nous retrouvons le système du second ordre (II. E'_{12}) formé par les équations (e'_1) et (e'_2) ; dans le cas où $U = u''$ nous retrouvons le système (II. E''_{34}) et dans le cas où $U = u$, le système (II. F) est le système composé de l'ensemble des systèmes (II. E'_{12}) et (II. E''_{34}).

3. *Résolution du problème de Cauchy ou du problème mixte des systèmes (II. E'_{12}) et (II. E''_{34}) par la généralisation de la méthode donnée par M^r Hadamard pour le même problème concernant les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* — Écrivons le système (II. E'_{12}) sous la forme

$$(II. E'_{12}) \quad \begin{aligned} \square u_1 + 2 b^\sigma \partial_\sigma u_1 - l u_1 + m_1 u_1 + m_2 u_2 &= 0, \\ \square u_2 + 2 b^\sigma \partial_\sigma u_2 - l u_2 + n_1 u_2 + n_2 u_1 &= 0, \end{aligned}$$

où b, l, m_1, m_2, n_1, n_2 sont des fonctions des x^σ .

Le système (II. E''_{34}) est semblable au système ci-dessus et la résolution est identique.

Nous voyons donc que les deux équations (II. E'_{12}) sont linéaires et hyperboliques normales à deux fonctions inconnues. Nous supposons essentiellement que les domaines de définition de u_1 et u_2 sont identiques et que les surfaces qui portent les données aux limites pour ces deux fonctions le sont aussi. Ceci étant, nous allons écrire le système ci-dessus sous la forme

$$(II. E'_{12})' \quad \begin{aligned} \square u_1 + 2 b^\sigma \partial_\sigma u_1 - l u_1 + m_1 u_1 + m u_2 &= 0, \\ s (\square u_2 + 2 b^\sigma \partial_\sigma u_2 - l u_2) + s n_1 u_2 + m u_1 &= 0 \end{aligned}$$

(où s est tel que $m_2 = s n_2 = m$) ou, sous une forme encore plus simplifiée,

$$(II. E'_{12})'' \quad \begin{aligned} H_1(u_1, u_2) &= F_1(u_1) + m u_2 = 0, \\ H_2(u_1, u_2) &= F_2(u_2) + m u_1 = 0. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant indiquer les principes de notre méthode de résolution de ce système. Soit $G_1(v_1)$ et $G_2(v_2)$ les « polynômes adjoints » respectivement de $F_1(u_1)$ et de $F_2(u_2)$, au sens de M^r Hadamard. Nous appelons système « adjoint » du système ci-dessus le système

$$(II. I'_{12}) \quad \begin{aligned} I_1(v_1, v_2) &= G_1(v_1) + m v_2 = 0, \\ I_2(v_1, v_2) &= G_2(v_2) + m v_1 = 0. \end{aligned}$$

Calculons maintenant les expressions

$$(II.14) \quad \begin{aligned} A &= v_1 H_1 - u_1 I_1 = v_1 F_2(u_1) - u_1 G_1(v_1) + m(v_1 u_2 - u_1 v_2), \\ B &= v_2 H_2 - u_2 I_2 = v_2 F_2(u_2) - u_2 G_2(v_2) + m(u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que nous pouvons écrire l'identité

$$(II.14') \quad \begin{aligned} A + B &= v_1 F_1(u_1) - u_1 G_1(v_1) + v_2 F_2(u_2) - u_2 G_2(v_2) \\ &= \sum \partial_\sigma \rho^\sigma(x^\sigma), \end{aligned}$$

où les ρ^σ sont facilement identifiables ; en effet, nous avons

$$\mathcal{P}^j = v_1 \partial_j u_1 - u_1 \partial_j v_1 + 2 u_1 v_1 b^j + s(v_2 \partial_j u_2 - u_2 \partial_j v_2 + 2 u_2 v_2 b^j) - u_2 v_2 \partial_j s$$

$$\mathcal{P}^4 = -v_1 \partial_4 u_1 + u_1 \partial_4 v_1 + 2 u_1 v_1 b^4 + s(v_2 \partial_4 u_2 + u_2 \partial_4 v_2 + 2 u_2 v_2 b^4) + u_2 v_2 \partial_4 s.$$

Donc si v_1 et v_2 sont une solution du système (II. I'_{12}) et si les surfaces qui portent les données sont les mêmes pour les deux fonctions inconnues u_1 et u_2 , nous pouvons appliquer la formule fondamentale de M^r Hadamard.

Mais, pour pouvoir appliquer la formule de résolution de M^r Hadamard, il faut que nous sachions trouver des résolutions « élémentaires » du système (II. I'_{12}) ci-dessus. Sans essayer de rechercher ces solutions « élémentaires » dans le cas le plus général, nous allons seulement les chercher dans le cas qui nous préoccupe, c'est-à-dire dans le cas où le système adjoint est déduit directement du système (II. E'_{12}).

Soit donc le système

$$(II. I'_{12})' \quad \begin{aligned} I_1(v_1, v_2) &= G_1(v_1) + m v_2 \\ &= (\square - 2 b^\sigma \partial_\sigma - l - 2 \partial_\sigma b^\sigma) v_1 + m_1 v_1 + m v_2 = 0, \\ I_2(v_1, v_2) &= G_2(v_2) + m v_1 \\ &= (\square - 2 b^\sigma \partial_\sigma - l - 2 \partial_\sigma b^\sigma) (s v_2)' + n_2 s v_2 + m v_1 = 0. \end{aligned}$$

Nous allons tout d'abord considérer la fonction $\Gamma = \sum (a^i - x^i)^2 - (\theta - t)^2$ et le cône d'équation $\Gamma = 0$ qui n'est autre que le cône (ou conoïde) caractéristique commun aux deux équations du système, issu du point x (point de coordonnées x^σ).

Nous savons, d'autre part, que les géodésiques de la métrique attachées aux équations ci-dessus, c'est-à-dire

$$\sum (da^i)^2 - (d\theta)^2 \quad (i = 1, 2, 3, \quad a^4 = \theta),$$

ont pour équations différentielles $da^i/\omega_1 = -d\theta/\omega_4 = d\lambda$.

Nous avons pris ici comme variables d'intégration les a^σ et comme coordonnées du point où nous désirons calculer les fonctions inconnues les x^σ . D'autre part, dans les équations différentielles ci-dessus les ω_σ sont des constantes. Les équations finies des géodésiques issues d'un point x s'écrivent

$$\frac{a^i - x^i}{\lambda} = \frac{da^i}{d\lambda} = \omega_i, \quad \frac{\theta - t}{\lambda} = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\omega_4$$

en prenant $\lambda = 0$ à l'origine des géodésiques. Les génératrices des cônes Γ sont des géodésiques de longueur nulle de la métrique, les ω_σ vérifient alors l'équation $\sum \omega_i^2 - \omega_4^2 = 0$.

Nous allons montrer maintenant que le système (II. I'_{12}) admet une solution « élémentaire » de la forme

$$(II.16) \quad v_1 = \frac{V_1}{\Gamma} + \mathcal{V}_1 \text{Log } \Gamma + w_1, \quad v_2 = \frac{V_2}{\Gamma} + \mathcal{V}_2 \text{Log } \Gamma + w_2.$$

En effet, si nous remplaçons ces expressions de v_1 et v_2 dans (II.12) nous trouvons

$$(II.17) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_1(v_1) + m v_2 &= \frac{-4\lambda}{\Gamma^2} \left[\frac{dV_1}{d\lambda} - V_1 b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Gamma} \left[\mathcal{G}_1(V_1) + m V_2 + 4 \frac{d(\lambda^{-1}\mathcal{V}_1)}{d\lambda} - 4 \mathcal{V}_1 \lambda b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} \right] + \\ &+ [\mathcal{G}_1(\mathcal{V}_1) + m \mathcal{V}_2] \text{Log } \Gamma + \text{termes en } w_1, w_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(v_2) + m v_1 &= \frac{-4\lambda}{\Gamma^2} \left[\frac{d(sV_2)}{d\lambda} - s V_2 b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Gamma} \left[\mathcal{G}_2(V_2) + m V_1 + 4 \frac{d(\lambda s^{-1}\mathcal{V}_2)}{d\lambda} - 4 s \mathcal{V}_2 \lambda b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} \right] + \\ &+ [\mathcal{G}_2(\mathcal{V}_2) + m \mathcal{V}_1] \text{Log } \Gamma + \text{termes en } w_1, w_2. \end{aligned}$$

Les termes en Γ^{-2} nous donnent

$$V_1(a^\sigma, x^\sigma) = \exp[F(a^\sigma, x^\sigma)], \quad \text{où} \quad F(a^\sigma, x^\sigma) = \int_x^a b_\sigma da^\sigma,$$

l'intégration étant faite le long de la droite qui va de x en a , respectivement de coordonnées x^σ et a^σ .

De même, nous obtenons $s V_2 = V_1$.

Ceci étant nous posons les développements formels suivants

$$(II.18) \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{1,0} + \sum_1^\infty \mathcal{V}_{1,p} \Gamma^p, \quad \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{2,0} + \sum_1^\infty \mathcal{V}_{2,p} \Gamma^p.$$

Suivant la méthode de Mr Hadamard pour une seule équation à une fonction inconnue, nous remplaçons ces valeurs de V_1 et V_2 dans le système (II.17) et nous trouvons que $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ (coefficients de $\text{Log } \Gamma$) doivent vérifier le système

$$(II.19) \quad \mathcal{G}_1(\mathcal{V}_1) + m \mathcal{V}_2 = 0, \quad \mathcal{G}_2(\mathcal{V}_2) + m \mathcal{V}_1 = 0.$$

En comparant aux coefficients des termes en Γ^{-1} et en suivant rigoureusement les calculs de Mr Hadamard, nous trouvons

$$(II.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{1,0} &= -\frac{V_1}{4h} \int_0^h \frac{\mathcal{G}_1(V_1) + m V_2}{V_1} dh, \\ \mathcal{V}_{2,0} &= -\frac{V_2}{4h} \int_0^h \frac{\mathcal{G}_2(V_2) + m V_1}{s V_2} dh, \end{aligned}$$

puis

$$(II.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{1,p} &= -\frac{V_1}{4p h^{p+1}} \int_0^h \frac{\mathcal{G}_1(\mathcal{V}_{1,p-1}) + m \mathcal{V}_{2,p-1}}{V_1} dh, \\ \mathcal{V}_{2,p} &= -\frac{V_2}{4p h^{p+1}} \int_0^h \frac{\mathcal{G}_2(\mathcal{V}_{2,p-1}) + m \mathcal{V}_{1,p-1}}{s V_2} dh. \end{aligned}$$

La démonstration de la convergence des séries (II.18) ne présente pas de difficultés majeures. Pour les notations et les définitions des symboles, nous renvoyons les lecteurs au livre de Mr Hadamard « Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques », pages 138 à 140. En effet, tous

les calculs de ces trois pages sont encore valables si nous majorons $\mathcal{V}_{1,0}$ et $\mathcal{V}_{2,0}$ de la même quantité, puis nous faisons un raisonnement par récurrence.

Avec les majorations

$$(II.22) \quad \mathcal{V}_{1,p} \ll K_p \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2p} \right., \quad \mathcal{V}_{2,p} \ll K_p \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2p} \right.$$

nous avons d'après (II.21)

$$(II.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{1,p+1} &\ll \frac{V_1}{4p} \frac{h^{p+1}}{h^{p+2}} \int_0^h \frac{h^{p+1}}{V_1} (\mathcal{G}_1 + m) \left[\frac{K_p}{\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)^{2p}} \right] dh, \\ \mathcal{V}_{2,p+1} &\ll \frac{V_2}{4p} \frac{h^{p+1}}{h^{p+2}} \int_0^h \frac{h^{p+1}}{s V_2} (\mathcal{G}_2 + m) \left[\frac{K_p}{\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)^{2p}} \right] dh. \end{aligned}$$

d'où, d'après les calculs de Mr Hadamard,

$$(II.24) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{1,p+1} &\ll K_{1,p+1} \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2(p+1)} \right., \\ \mathcal{V}_{2,p+1} &\ll K_{2,p+1} \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2(p+1)} \right. . \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $K_{1,p+1}$ est toujours plus grand ou plus petit que $K_{2,p+1}$; enfin si nous désignons par K_{p+1} le plus grand des $K_{1,p+1}$ et $K_{2,p+1}$ nous obtenons les majorations

$$(II.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{1,p+1} &\ll K_{p+1} \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2(p+1)} \right., \\ \mathcal{V}_{2,p+1} &\ll K_{p+1} \left/ \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{2(p+1)} \right., \end{aligned}$$

avec les mêmes K_{p+1} et nous obtenons ainsi une même majoration convergente pour les deux séries. Et nous concluons avec Mr Hadamard que les séries (II.18) sont convergentes et même uniformément convergentes aux environs de $\Gamma = 0$.

Pour achever d'intégrer le système (II. I₁₂) il suffit :

d'appliquer la formule « fondamentale » de Mr Hadamard à la somme $A + B$ de (II.14') en prenant pour v_1 et v_2 les solutions « élémentaires » que nous venons de calculer ;

de reprendre exactement les mêmes calculs de Mr Hadamard dans son livre cité ci-dessus pages 316 et suivantes et nous trouvons

$$(II.26) \quad u_1 + u_2 = R(x^\sigma).$$

Enfin en prenant une des deux équations (II. I₁₂), la première par exemple, puis en remplaçant u_2 par sa valeur tirée de (II.26), nous obtenons une équation linéaire, hyperbolique normale à une fonction inconnue, que nous pouvons résoudre par les méthodes habituelles. Cette résolution nous donne u_1 , puis u_2 est donnée par (II.26).

4. *Solution « potentiels de ligne ».* — Pour les notations et définitions nous renvoyons à la thèse de Mr Fer. Nous posons

$$(II.27) \quad u_j = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu_j(x^\sigma, \alpha^\sigma)}{2} d\theta \quad (j = 1, 2).$$

Si nous portons ces expressions de u_j dans le système (II. I'12) nous trouvons facilement que :

les μ_j/r vérifient le système (II. I'12) lui-même ;

les μ_j doivent vérifier la même condition aux limites. En effet, en suivant les raisonnements de Mr Fer, cette condition ne dépend que des termes comportant des dérivées partielles des premier et second ordres uniquement : or, dans les deux équations de (II. I'12), ces termes sont identiques à u_j près. Cette condition est la suivante (elle est d'ailleurs la même que dans le cas de l'équation d'onde scalaire étudiée par Mr Fer) : pour tout groupe de points (x^i, t) et (x^i, θ) vérifiant la relation

$$(II.28) \quad t - \tau - \rho = 0,$$

nous devons avoir

$$(II.29) \quad \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \mu_j}{\partial t} + \left(b^i \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} - b^4 \right) \mu_j = 0 \quad (j = 1, 2)$$

ou, après multiplication par $\rho = t - \tau$,

$$(II.30) \quad \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial x^\sigma} + b_\sigma \mu_j \right) (x^\sigma - \alpha^\sigma) = 0.$$

Nous voyons donc que ces conditions entrent dans le cadre des conditions que nous nous sommes imposées pour pouvoir intégrer le système (II. I'12) par la méthode que nous avons indiquée plus haut.

Mais nous ne calculerons pas ces solutions potentiels de ligne car elles ne nous permettent pas de déterminer à priori les propriétés des solutions à singularité mobile.

5. Résolution du système (II. I'12) par la méthode du développement en série suivant les puissances de D . — Posons

$$(II.31) \quad u_j = f_j \exp(i S_j) \quad (j = 1, 2).$$

Remplaçons ces valeurs de u_j dans (II. I'12) ; nous trouvons

$$(II. J_1) \quad \square f_1 - [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_1)^2 - 2 B^\sigma \partial_\sigma S_1 + l] f_1 - H_3 f_1 + \\ + [(E_2 - H_1) \cos(S_2 - S_1) + (H_2 + E_1) \sin(S_2 - S_1)] f_2 = 0,$$

$$(II. J_2) \quad \square f_2 - [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_2)^2 - 2 B^\sigma \partial_\sigma S_2 + l] f_2 - H_3 f_2 + \\ + [-(E_2 + H_1) \cos(S_1 - S_2) - (H_2 - E_1) \sin(S_1 - S_2)] f_1 = 0,$$

$$(II. C_1) \quad 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_1 - B_\sigma) \partial_\sigma f_1 + f_1 \square S_1 - E_3 f_1 + \\ + [(E_2 - H_1) \sin(S_2 - S_1) - (E_1 + H_2) \cos(S_2 - S_1)] f_2 = 0,$$

$$(II. C_2) \quad 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_2 - B_\sigma) \partial_\sigma f_2 + f_2 \square S_2 + E_3 f_2 + \\ + [-(E_2 + H_1) \sin(S_1 - S_2) + (H_2 - E_1) \cos(S_1 - S_2)] f_1 = 0.$$

Puis, comme au chapitre I nous considérons une trajectoire Γ et un point $M(t)$ parcourant cette trajectoire suivant une certaine loi. Nous déterminons ensuite une quantité scalaire D astreinte à être nulle en $M(t)$ à l'instant t et à remplir les mêmes conditions qu'au chapitre précédent. Posons alors

$$(II.32) \quad f_j = \frac{1}{D} (f_{j,0} + f_{j,1} D + f_{j,2} D^2 + \dots + f_{j,n} D^n + \dots) \quad (j = 1, 2)$$

$$(II.32') \quad S_j = S_{j,0} + S_{j,1} D + S_{j,2} D^2 + \dots + S_{j,n} D^n + \dots \quad (j = 1, 2)$$

et portons ces valeurs de f_j et S_j dans les quatre équations (II. J₁), (II. J₂), (II. C₁) et (II. C₂) ; nous trouvons, comme au chapitre précédent :

termes en D^{-3} ,

$$(II.33) \quad f_{j,0} \square(1/D) = 0$$

et, comme nous désirons avoir effectivement une solution singulière en $M(t)$, $f_{j,0}$ est essentiellement différent de 0, donc D doit obéir à la même équation (I.5), c'est-à-dire

$$(II.34) \quad \square(1/D) = 0 ;$$

termes en D^{-2} ,

$$(II.35) \quad g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma f_{j,0} \partial_\sigma D = 0$$

et

$$(II.36) \quad -2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_{j,0} + S_{j,1} \partial_\sigma D - B_\sigma) f_{j,0} \partial_\sigma D + f_{j,0} S_{j,1} D \square D = 0$$

ou

$$(II.36') \quad -2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_{j,0} - B_\sigma) \partial_\sigma D + f_{j,0} S_{j,1} [D \square D - 2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2] = 0,$$

soit, compte tenu de l'égalité (II.34),

$$(II.37) \quad [2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_{j,0} - B_\sigma) \partial_\sigma D]_{M(t)} = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu au chapitre I, nous pouvons conclure qu'au point $M(t)$ nous avons les relations

$$(II.38) \quad [\partial_\sigma S_{j,0} - B_\sigma]_{M(t)} = \rho_j v_\sigma \quad (j = 1, 2) .$$

Ainsi chaque fonction u_j obéit séparément à un théorème équivalent à celui du théorème de guidage « faible » dans le cas de la fonction d'onde scalaire.

En égalant à 0 les autres termes en D^{-1} , D^0 , D^1 , etc., nous voyons, comme au chapitre précédent, que nous pouvons calculer de proche en proche les $f_{j,n}$ et $S_{j,n}$. Mais il nous faut démontrer la convergence des séries (II.32) et (II.32'). Pour cela, comme au chapitre I nous procédons comme suit. Posons

$$(II.39) \quad u_j = (1/D) F_j \exp(\mathbf{i} S_{j,0}) ,$$

où $S_{j,0}$ a été choisi de telle sorte que les équations aux dérivées partielles (II.36) soient satisfaites. Puis nous posons

$$(II.40) \quad F_j = F_{j,0} + F_{j,1} D + F_{j,2} D^2 + \dots + F_{j,n} D^n + \dots \quad (j = 1, 2) .$$

Il est alors visible que $F_{j,0} = f_{j,0}$ et que, par suite, cette quantité est réelle, mais les autres quantités $F_{j,n}$ ne le sont pas nécessairement.

La démonstration de la convergence des séries (II.40) ne présente pas de difficultés majeures et se fait de la même manière qu'au chapitre précédent. En effet, nous avons ici [en tenant compte de (II.38) et des définitions du chapitre I] :

termes en D^{n-2} ,

$$(II.41) \quad \square f_{j_1, n-1} + n(n+1) F_{j_1, n+1} \delta + a_{j_1} F_{j_1, n-1} + m_{j_1} F_{j_2, n-1} + \\ + 2 \mathbf{i} g^{\sigma\sigma} \rho_{j_1} v_\sigma \partial_\sigma F_{j_1, n-1} + 2(n-1) g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_{j_1, n} \partial_\sigma D = 0 \\ (j_1 = 1, j_2 = 2 \text{ ou } j_1 = 2, j_2 = 1) ,$$

où

$$(II.42) \quad a_1 = l - 2 B^\sigma \partial_\sigma S_{1,0} - g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_{1,0})^2 + \mathbf{i} \square S_{1,0} - m_1 , \\ a_2 = l - 2 B^\sigma \partial_\sigma S_{2,0} - g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_{2,0})^2 + \mathbf{i} \square S_{2,0} - n_1$$

et, par suite, nous pouvons écrire d'une manière plus condensée

$$(II.43) \quad n(n+1) \delta F_{j_1, n+1} = -2(n-1) g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F_{j_1, n} \partial_\sigma D - \\ - \mathcal{F}_{j_1}(F_{j_1, n-1}) - m_{j_1} F_{j_2, n-1} .$$

Donc si nous pouvons majorer les $F_{j,0}$ d'une part et les $F_{j,1}$ d'autre part par les mêmes quantités, ce qui est possible d'après ce que nous avons vu au chapitre I, nous démontrons que si nous avons

$$(II.44) \quad F_{1,n} \leq K_n / \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^n \quad \text{et} \quad F_{2,n} \leq K_n / \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^n,$$

nous avons, d'après (II.43),

$$(II.45) \quad n(n+1) \delta F_{j,n+1} \leq 2(n-1) g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D \partial_\sigma \left\{ \frac{K_n}{[1 - (\rho/r)]^n} \right\} + (\bar{f}_j + m_j) \frac{K_{n-1}}{[1 - (\rho/r)]^{n-1}}$$

et, par suite,

$$F_{j,n+1} \leq K_{n+1} / [1 - (\rho/r)]^{n+1}$$

avec

$$(II.46) \quad K_{n+1} = \frac{1}{\delta n(n+1)} [2n(n-1) \gamma' K_n + \alpha' n(n+1) K_{n-1}],$$

car la majoration (I.41) devient $w \leq K [1 - (\rho/r)]^n$ et nous pouvons avoir

$$(II.47) \quad (\bar{f}_j + m_j) w = \square w + 2i g^{\sigma\sigma} \rho_j v_\sigma \partial_\sigma w + (a_j + m_j) w \leq \alpha' K n(n+1) / [1 - (\rho/r)]^{n+2} \quad (j = 1, 2).$$

Donc les séries (II.40) sont majorées par une même série de terme général K_{n+1} et les K_{n+1} sont donnés par les relations (II.46). Or, d'après le chapitre I, la série ci-dessus est uniformément convergente aux environs de $D = 0$. Donc la résolution par des développements (II.32) et (II.32') est valable.

Donc les seules conditions nécessaires, que nous puissions tirer des équations de Dirac pour les solutions à singularité mobile du type pôle, sont les relations (II.35) et (II.37) et, de plus, nous n'avons aucune raison de supposer $S_{1,0} = S_{2,0}$.

Cependant nous pouvons choisir d'abord un S_0 tel que nous ayons

$$(II.37') \quad [2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S_0 - B_\sigma) \partial_\sigma D]_{M(t)} = 0.$$

Puis nous posons

$$(II.48) \quad S_{j,0} = S_0 + S'_{j,0} \quad (j = 1, 2).$$

Alors, en retranchant (II.37) et (II.37'), nous trouvons

$$(II.49) \quad [2 g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma S'_{j,0}) \partial_\sigma D]_{M(t)} = 0.$$

Posons

$$(II.50) \quad u_j = (1/D) F_j \exp(i S_0)$$

et

$$(II.51) \quad F'_j = F'_{j,0} + F'_{j,1} D + F'_{j,2} D^2 + \dots + F'_{j,n} D^n + \dots$$

Nous avons alors les relations évidentes

$$F'_{j,0} = F_{j,0} \exp(i S'_{j,0}) = f_{j,0} \exp(i S'_{j,0}), \quad F'_{j,n} = F_{j,n} \exp(i S'_{j,0})$$

et, d'après les relations (II.35) et (II.49), nous vérifions que

$$(II.52) \quad g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma F'_{j,0} \partial_\sigma D = 0.$$

Donc $F'_{j,0}$, quoique pas nécessairement réels, vérifient néanmoins la relation (II.35) comme $F_{j,0}$.

6. *Forme générale et propriétés des solutions à singularité mobile du type pôle des équations de Dirac.* — Soit u, u', u'' définis par (II.5), où les u_j sont définis par des relations analogues (II.50) et (II.51), où S_0 est commun aux quatre u_σ

et où les u_σ vérifient les équations (II. E'₁₂) et (II. E''₃₄). Il est alors évident que la solution générale de (II. E) est donnée par (II. 6).

Nous voyons immédiatement qu'avec les matrices γ^σ que nous avons choisies et en observant les systèmes (II. E') et (II. E'') :

si $U = \mathbf{u}'$, ψ'_1 et ψ'_2 ont une singularité polaire d'ordre 1 par rapport à D , tandis que ψ'_3 et ψ'_4 ont une singularité polaire d'ordre 2 ;

si $U = \mathbf{u}''$ c'est l'inverse, ψ''_1 et ψ''_2 sont d'ordre 2 et ψ''_3 et ψ''_4 sont du premier ordre ;

si $U = \mathbf{u}$ les quatre fonctions d'onde sont d'ordre 2.

Mais est-il possible de choisir u_1 et u_2 (dans le cas où $U = \mathbf{u}'$ par exemple) de telle sorte que ψ'_3 et ψ'_4 soient tous du premier ordre ? Il faut donc annuler les termes du second ordre de ψ'_3 et ψ'_4 , soit

$$(II. 53) \quad \begin{aligned} F'_{1,0} (\partial_1 D - \mathbf{i} \partial_2 D) - F'_{2,0} (\partial_3 D - \partial_4 D) &= 0, \\ F'_{1,0} (\partial_3 D + \partial_4 D) + F'_{2,0} (\partial_1 D + \mathbf{i} \partial_2 D) &= 0. \end{aligned}$$

Or les $F'_{j,0}$ ne sont pas nuls, donc

$$(II. 54) \quad \begin{vmatrix} \partial_1 D - \mathbf{i} \partial_2 D & -(\partial_3 D - \partial_4 D) \\ \partial_3 D + \partial_4 D & \partial_1 D + \mathbf{i} \partial_2 D \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(II. 54') \quad g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2 = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu au premier chapitre, la relation (II. 54') ne peut être satisfaite que pour $v = 1$ ce qui est un cas très particulier. Il est donc impossible que les quatre ψ_σ soient en même temps du premier ordre. Nous aboutissons à la même conclusion si nous raisonnons directement sur le système (II. E).

7. Le vecteur-courant de Dirac et l'équation de continuité. — Soit

$$(II. 55) \quad \begin{aligned} -\gamma^4 \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & -\gamma^4 \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \\ -\gamma^4 \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & -\gamma^4 \gamma^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

soit

$$(II. 56) \quad \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho = 2 g^{\rho\sigma},$$

où $g^{\rho\sigma}$ est une matrice diagonale représentant la métrique 1, 1, 1, — 1, avec toujours $c = 1$,

$$(II. 57) \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad \psi^+ = [\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*]$$

et ψ_σ^* est l'imaginaire conjuguée de ψ_σ .

Par définition, le vecteur-courant de Dirac est le vecteur $\vec{j}$ dont les composantes sont

$$(II.58) \quad j^\sigma = -\psi^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \psi$$

ou, plus explicitement,

$$j^1 = \psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2 - \psi_3 \psi_1^* + \psi_3^* \psi_1, \quad j^2 = -i(\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2 - \psi_3 \psi_4^* + \psi_3^* \psi_4), \\ j^3 = \psi_1 \psi_1^* - \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* - \psi_4 \psi_4^*, \quad j^4 = \psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*.$$

Nous savons que si les ψ_σ vérifient les équations (II.E), $\vec{j}$ vérifie automatiquement l'équation de continuité.

$$(II.59) \quad \partial_\sigma j^\sigma = 0.$$

Donc l'équation de continuité ne peut pas apporter de nouvelles conditions à nos fonctions u_σ . Cependant nous allons calculer les composantes du vecteur $\vec{j}$ et vérifier quand même que l'équation de continuité est une identité. Posons donc,

$$(II.60) \quad u_\sigma = (\omega_{\sigma,0}/D) + \omega_{\sigma,1} + \omega_{\sigma,2} D + \dots + \omega_{\sigma,n} D^{n-1} + \dots \\ (\sigma = 1, 2, 3, 4).$$

Les relations entre les $\omega_{\sigma,n}$ et les $F'_{\sigma,n}$ et S_0 sont immédiates, par exemple,

$$(II.61) \quad \omega_{\sigma,0} = F'_{\sigma,0} \exp(i S_0).$$

Puis posons

$$(II.62) \quad U = (1/D) (\Omega_0 + \Omega_1 D + \dots + \Omega_n D^n + \dots)$$

avec, pour Ω_0 par exemple, une des valeurs

$$(II.63) \quad \omega'_0 = \begin{bmatrix} \omega_{1,0} \\ \omega_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega''_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{3,0} \\ \omega_{4,0} \end{bmatrix}, \quad \omega_0 = \omega'_0 + \omega''_0 = \begin{bmatrix} \omega_{1,0} \\ \omega_{2,0} \\ \omega_{3,0} \\ \omega_{4,0} \end{bmatrix},$$

les autres Ω_n sont définis de la même manière que Ω_0 .

Dans ce qui suit nous nous contenterons de vérifier (II.59) pour les premières puissances de D seulement. D'où, successivement,

$$(II.64) \quad \partial_\sigma U = -\frac{\partial_\sigma D}{D^2} \Omega_0 + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0 + \partial_\sigma \Omega_1 + \Omega_2 \partial_\sigma D + \dots),$$

$$(II.65) \quad \partial_\sigma U - i B_\sigma U = -\frac{\partial_\sigma D}{D^2} \Omega_0 + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0 - i B_\sigma \Omega_0) - \\ - \partial_\sigma \Omega_1 + \Omega_2 \partial_\sigma D - i B_\sigma \Omega_1 + \dots;$$

donc

$$(II.66) \quad \psi - \gamma^\sigma \left[-\frac{\partial_\sigma D}{D^2} \Omega_0 + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0 - i B_\sigma \Omega_0) \right] + k \Omega_0 \frac{1}{D} + \dots,$$

$$(II.66') \quad \psi^+ = \left[-\frac{\partial_\sigma D}{D^2} \Omega_0^+ + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0^+ - i B_\sigma \Omega_0^+) \right] g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma + \frac{1}{D} k \Omega_0^+ + \dots$$

Pour la commodité des calculs nous posons

$$(II.67) \quad \partial_\sigma D = X_\sigma.$$

Alors,

$$j^\rho = -\psi^+ \gamma^4 \gamma^\rho \psi \\ = \left\{ \left[-\frac{X_\sigma}{D^2} \Omega_0^+ + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0^+ - i B_\sigma \Omega_0^+) \right] g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma + \frac{1}{D} k \Omega_0^+ + \dots \right\} \gamma^4 \gamma^\rho \times \\ \times \left\{ \gamma^\sigma \left[-\frac{X_\sigma}{D^2} \Omega_0 + \frac{1}{D} (\partial_\sigma \Omega_0 - i B_\sigma \Omega_0) \right] + \frac{1}{D} k \Omega_0 + \dots \right\}$$

ou

$$(II.68) \quad j^p = (1/D^4) (- \Omega_0^+ g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\sigma X_\alpha) + \\ + (1/D^3) [\Omega_0^+ g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha X_\alpha (\partial_\sigma \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_\sigma) + \\ + (\partial_\sigma \Omega_0^+ + i B_\sigma \Omega_0^+) g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\alpha] + \\ + (k/D^3) (\Omega_0^+ g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \Omega_\sigma X_\sigma + \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\alpha) + \dots ;$$

le terme en D^{-4} de j^p peut s'écrire, en posant

$$(II.69) \quad \lambda^\sigma = - \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \Omega_0,$$

$$(II.70) \quad j_{-4}^p = \frac{1}{D^4} [\delta \lambda^p - 2 X^p (\lambda^\beta X_\beta)].$$

Calculons maintenant le terme en D^{-5} de $\partial_\sigma \gamma^\sigma$; nous obtenons

$$(II.71) \quad -4 \partial_\rho D [\delta \lambda^\rho - 2 X^\rho (\lambda^\beta X_\beta)] + D \lambda^\rho \partial_\rho \delta - \\ - 2 \partial_\rho X^\rho (\lambda^\beta X_\beta) D - 2 X^\rho (\lambda^\beta \partial_\rho X_\beta) D$$

et nous vérifions facilement que (II.71) est nul d'après le choix de D . D'ailleurs, nous avons successivement

$$-4 \delta (\lambda^\rho X_\rho) + 8 \delta (\lambda^\beta X_\beta) + D \lambda^\rho \partial_\rho \delta - 2 D \square D (\lambda^\beta X_\beta) - 2 D \lambda^\beta (X^\rho \partial_\rho X_\beta);$$

or $D \square D = 2 \delta$, alors

$$D \lambda^\rho \partial_\rho \delta = D \lambda^\rho \partial_\rho [g^{\sigma\sigma} (\partial_\sigma D)^2] = 2 D \lambda^\rho X^\sigma \partial_\rho X_\sigma ;$$

enfin

$$2 D \lambda^\beta (X^\rho \partial_\rho X_\beta) = 2 D \lambda^\beta X^\rho \partial_\beta X_\rho ;$$

donc (II.71) est bien nul.

Calculons maintenant le terme en D^{-4} de $\partial_\sigma j^\sigma$ et nous obtenons, en remarquant que

$$(II.72) \quad g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 = - \gamma^4 \gamma^\sigma,$$

$$(II.73) \quad \partial_\rho (\Omega_0^- \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0) X_\sigma X_\alpha = \\ + 2 X_\rho [\Omega_0^- \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha X_\sigma (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) + (\partial_\alpha \Omega_0^- + i B_\alpha \Omega_0^-) \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\sigma] - \\ - [\Omega_0^- \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha D X_{\sigma\rho} (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) + (\partial_\alpha \Omega_0^- + i B_\alpha \Omega_0^-) \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_{\sigma\rho} D] - \\ - 3 k X_\rho (- \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \Omega_0 X_\sigma + \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\alpha) + \\ + k D (- \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \Omega_\sigma X_\sigma + \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_\alpha X_\alpha),$$

où nous avons posé

$$(II.74) \quad \partial_{\alpha\beta}^2 D = X_{\alpha\beta}.$$

Il est facile de voir que les deux derniers termes contenant k en facteur sont nuls. Pour simplifier le reste remarquons que, avec les définitions (II.69),

$$\Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\sigma X_\alpha = \delta \lambda^\rho - 2 X^\rho (\lambda^\alpha X_\alpha),$$

$$\text{puis} \quad [\partial_\rho (\Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_\sigma)] X_\sigma X_\alpha = \delta \partial_\rho \lambda^\rho - 2 X^\rho (\partial_\rho \lambda^\alpha X_\alpha);$$

d'autre part, par exemple,

$$D \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) X_{\rho\alpha} = \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\alpha (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) D \square D ;$$

de même,

$$\Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma \gamma^p \gamma^\alpha (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) X_\rho X_\alpha = \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\alpha (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) \delta,$$

d'où, à cause de (II.34), (II.73) devient

$$\delta \partial_\rho \lambda^\rho - 2 X^\rho (\partial_\rho \lambda^\alpha X_\alpha) + [\Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^\alpha (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) + (\partial_\alpha \Omega_0^- + i B_\alpha \Omega_0^-) \gamma^4 \gamma^\alpha \Omega_0] \delta.$$

Enfin, en remarquant que la partie entre crochets est égale à $-\partial_\alpha \lambda^\alpha$, nous trouvons finalement

$$(II.73') \quad -2 X^\sigma (\partial_\rho \lambda^\alpha X_\alpha) = -2 X_\alpha (X^\sigma \partial_\rho \lambda^\alpha)$$

et, d'après les définitions des λ^σ et les égalités (II.52), il est facile de voir que (II.73') est nul. Nous ne poursuivons pas les calculs car ce qui nous intéresse ce sont les propriétés des $\omega_{\sigma,0}$.

8. *Etude du théorème du guidage de M^r Louis de Broglie.* Ce théorème énonce notamment qu'au point singulier $M(t)$ nous devons avoir

$$(II.75) \quad (j^\sigma)_{M(t)} \sim \rho v^\sigma.$$

Apparemment il serait facile de démontrer ce théorème de la manière suivante : soit $\psi_\sigma = (a_\sigma/D^{1/2}) + \dots$ une solution de type polaire ; alors le calcul des j^σ donne $j^\sigma = (b^\sigma/D^{3/2}) + \dots$ et, par suite, l'équation de continuité donne au point $M(t)$: $(\dot{c}_\sigma D b^\sigma)_{M(t)} = 0$; d'après le chapitre I, cette égalité entraîne $(b^\sigma)_{M(t)} = \rho v^\sigma$ et le théorème du guidage serait démontré. Mais, en fait, la situation est loin d'être aussi simple et, comme nous venons de voir, les quantités b^σ contiennent elles aussi des quantités dont les dérivées partielles deviennent singulières en $M(t)$. D'autre part, nous avons vu que l'équation de continuité ne peut pas fournir d'autres propriétés aux solutions des équations (II.E) ; dans le cas de l'équation scalaire, l'équation de continuité est une des équations obtenues quand nous posons $u = f e^{i\varphi}$ et quand nous séparons les parties imaginaires des parties réelles. Or ici cette méthode donne les équations (II.C_j) et l'équation de continuité est déduite du système (II.E).

Donc les relations (II.75), qui constituent ici le théorème du guidage, ne sont pas les conséquences directes du système (II.E), comme c'est le cas de l'équation scalaire. Mais certaines considérations d'ordre physique justifient l'adoption des égalités (II.75) :

a) dans le cas des solutions ondes planes, les relations (II.75) sont satisfaites ;

b) dans son étude de l'approximation de l'optique géométrique dans le cas des équations de Dirac, M^r L. de Broglie (Théorie des particules de spin 1/2, p. 122) est arrivé à poser

$$(II.76) \quad -i \psi^\dagger \gamma^4 \psi = \rho \sqrt{1 - v^2} ;$$

or, une condition suffisante pour que cette égalité ait lieu est que nous ayons (II.75) ;

c) le courant de Dirac est le courant conservatif de la probabilité comme le courant de l'équation scalaire ; il est par suite normal de postuler (II.75).

Voyons donc maintenant dans quels cas les solutions singulières du type pôle, que nous venons de calculer, peuvent satisfaire à (II.75). Reprenons les égalités (II.58) ; posons

$$(II.77) \quad \begin{cases} a^1 = \psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2 & , & b^1 = \psi_3 \psi_4^* + \psi_3^* \psi_4 & , \\ a^2 = -i (\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2) & , & b^2 = i (\psi_3 \psi_4^* - \psi_3^* \psi_4) & , \\ a^3 = \psi_1 \psi_1^* - \psi_2 \psi_2^* & , & b^3 = \psi_3 \psi_3^* - \psi_4 \psi_4^* & , \\ a^4 = \psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* & , & b^4 = \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^* & . \end{cases}$$

et désignons par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ les vecteurs de composantes respectivement a^σ et b^σ . Nous avons l'égalité

$$(II.78) \quad \vec{j} = \vec{a} + \vec{b} ;$$

les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont visiblement sur le cône de lumière.

Ceci étant, prenons pour Ω_0 les valeurs ω_0' ou ω_0'' , c'est-à-dire considérons tout

d'abord les solutions « simples » des systèmes (II. E') et (II. E''). Nous constatons alors que le vecteur $\vec{\lambda}$ défini par (II. 69) est sur le cône de lumière, soit

$$(II. 79) \quad g^{\sigma\sigma} (\lambda^\sigma)^2 = 0.$$

Il est par suite facile de vérifier que

$$(II. 80) \quad g^{\sigma\sigma} (j_{-4}^\sigma)^2 = 0.$$

En effet, d'après (II. 70),

$$g^{\sigma\sigma} (j_{-4}^\sigma)^2 = \delta^{\sigma\sigma} g^{\sigma\sigma} (\lambda^\sigma)^2 + 4 \delta (\lambda^\beta X_\beta)^2 - 4 \delta (\lambda^\beta X_\beta)^2 = 0.$$

La relation (II. 80) n'est pas surprenante car, pour le système (II. E') par exemple, les solutions singulières sont du premier ordre en ψ'_1, ψ'_2 et du second ordre en ψ'_3, ψ'_4 . Donc, au point singulier, tout se passe comme si ψ'_3 et ψ'_4 seuls comptent dans le calcul des composantes de $\vec{j}$; d'après (II. 77) et (II. 78), au point singulier $\vec{j}$ est équipollent à $\vec{b}$. Si nous avons pris les solutions de (II. E'') les rôles sont inversés entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et nous savons que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont sur le cône de lumière.

D'autre part, il est impossible que tous les j_{-4}^σ soient nulles en même temps. Donc dans ces cas-là il est impossible de satisfaire le théorème du guidage.

Examinons maintenant le cas où $v = 1$; comme $[(\partial_\sigma D) v^\sigma]_{M(t)} = 0$ et $\partial_\sigma D = \mu v_\sigma$ en $M(t)$, (II. 70) devient

$$j_{-4}^\sigma = \frac{1}{D^4} [-\mu^2 v^\sigma (\lambda^\beta v_\beta)]$$

et le théorème du guidage est *automatiquement* vérifié.

Remarque. — L'expression (II. 70) pourrait suggérer que pour vérifier le théorème du guidage, il suffirait que $\lambda^\sigma = \chi v^\sigma$; alors $\lambda^\sigma X_\sigma = \chi v^\sigma X_\sigma = 0$ en $M(t)$ et

$$j_{-4}^\sigma = \frac{1}{D^4} \delta \lambda^\sigma = \frac{1}{D^4} \delta \chi v^\sigma;$$

mais, d'après (II. 79), il faut que $v = 1$.

CAS OÙ $\Omega_0 = \omega_0 = \omega'_0 + \omega''_0$. — Il est facile de s'assurer que les égalités (II. 79) et (II. 80) ne sont plus vérifiées et il est alors peut-être possible de satisfaire le théorème du guidage. En effet, nous désirons avoir

$$(II. 81) \quad j_{-4}^\sigma = \rho v^\sigma \text{ en } M(t)$$

ou, d'après (II. 70),

$$\gamma_{-4}^\sigma v_\sigma = \frac{1}{D^4} [\delta \lambda^\sigma v_\sigma - 2 X^\sigma v_\sigma (\lambda^\beta X_\beta)] = \frac{1}{D^4} \delta \lambda^\sigma v_\sigma$$

ou, en tenant compte de (II. 81), $\delta \lambda^\sigma v_\sigma = \rho v^\sigma v_\sigma$, d'où

$$(II. 82) \quad \lambda^\sigma = \chi v^\sigma.$$

Il est facile de voir que les conditions (II. 82) sont suffisantes. Ecrivons-les explicitement (nous avons supprimé les indices 0 pour la commodité des calculs) :

$$(II. 82') \quad \begin{cases} \lambda^1 = \omega_1 \omega_2^* + \omega_1^* \omega_2 + \omega_3 \omega_4^* + \omega_3^* \omega_4, \\ \lambda^2 = -i (\omega_1 \omega_2^* - \omega_1^* \omega_2 - \omega_3 \omega_4^* + \omega_3^* \omega_4), \\ \lambda^3 = \omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^* + \omega_3 \omega_3^* - \omega_4 \omega_4^*, \\ \lambda^4 = \omega \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^* + \omega_3 \omega_3^* + \omega_4 \omega_4^*. \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'au point singulier les relations (II. 82') permettent

de calculer par exemple ω_3 et ω_4 en fonction de ω_1 , ω_2 et des v^σ . En effet, au point $M(t)$ les ω_σ sont des fonctions de t comme χ et les v^σ ; posons donc

$$(II.83) \quad \omega_\sigma = F_\sigma \exp(i S_\sigma).$$

Nous mettons les indices des v^σ en bas, réservant la partie supérieure pour les seules puissances; alors (II.82') devient

$$(II.82'') \quad \begin{cases} 2 F_1 F_2 \cos(S_1 - S_2) + 2 F_3 F_4 \cos(S_3 - S_4) = \chi v_1, \\ 2 F_1 F_2 \sin(S_1 - S_2) - 2 F_3 F_4 \sin(S_3 - S_4) = \chi v_2, \\ F_1^2 - F_2^2 + F_3^2 - F_4^2 = \chi v_3, \\ F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = \chi v_4. \end{cases}$$

Pour la suite de nos calculs nous remplaçons v_4 par 1 sans restreindre la généralité. Les deux dernières équations (II.82'') donnent

$$(II.84) \quad F_3^2 = \frac{1}{2} \chi (1 + v_3) - F_1^2, \quad F_4^2 = \frac{1}{2} \chi (1 - v_3) - F_2^2$$

et les deux premières équations (II.82'') deviennent

$$(II.85) \quad \begin{aligned} \cos(S_3 - S_4) &= \frac{1}{F_3 F_4} \left[\frac{1}{2} \chi v_1 - F_1 F_2 \cos(S_1 - S_2) \right], \\ \sin(S_3 - S_4) &= \frac{1}{F_3 F_4} \left[-\frac{1}{2} \chi v_2 + F_1 F_2 \sin(S_1 - S_2) \right]. \end{aligned}$$

Pour achever le calcul des valeurs de ω_3 et ω_4 :

a) il faut que les équations (II.85) soient compatibles, c'est-à-dire que nous devons avoir la relation

$$(II.86) \quad \cos^2(S_3 - S_4) + \sin^2(S_3 - S_4) = 1,$$

ce qui impose en même temps aux seconds membres de (II.85) d'être en valeur absolue inférieurs à 1;

b) cette relation (II.86) permet de calculer χ et il nous faut démontrer que cette valeur de χ est toujours positive quels que soient v_1 , F_1 et F_2 ;

c) alors (II.84) donnent F_3 et F_4 , mais il faut vérifier que les valeurs obtenues sont toujours réelles. Puis (II.85) donnent $S_3 - S_4$.

Remarquons tout de suite que le calcul donne seulement F_3 , F_4 et $S_3 - S_4$ en fonction de F_1 , F_2 , $S_1 - S_2$ et des v_i . Il reste donc une certaine indétermination dans le calcul de S_3 et de S_4 .

Calculons χ ; (II.86) devient

$$(II.86') \quad \chi = \frac{2}{1 - v^2} \left[F_1^2 (1 - v_3) + \right. \\ \left. + F_2^2 (1 + v_3) - 2 F_1 F_2 (v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha) \right],$$

où nous avons posé $\alpha = S_1 - S_2$.

Pour montrer que χ est toujours positif nous allons exprimer les v_i en fonction des coordonnées polaires de l'espace à trois dimensions de la géométrie et nous obtenons

$$(II.87) \quad v_1 = v \sin \mu \cos \theta, \quad v_2 = v \sin \mu \sin \theta, \quad v_3 = v \cos \mu,$$

où μ et θ sont les deux angles qui déterminent la direction de $\vec{v}$; (II.86') devient

$$(II.86'') \quad \chi = \frac{2}{1 - v^2} \left[F_1^2 (1 - v \cos \mu) + \right. \\ \left. + F_2^2 (1 + v \cos \mu) - 2 F_1 F_2 v \sin \mu \cos(\alpha - \theta) \right].$$

Nous voyons que χ est une forme homogène du second ordre en F_1 et F_2 ; les coefficients de F_1^2 et F_2^2 sont positifs et le discriminant est négatif comme nous allons le voir :

$$\begin{aligned}\Delta'_\chi &= v^2 \sin^2 \mu \cos^2 (\alpha - \theta) - (1 - v^2 \cos^2 \mu) \\ &\leq v^2 \sin^2 \mu + v^2 \cos^2 \mu - 1 = v^2 - 1 \leq 0.\end{aligned}$$

Donc χ est toujours positif.

Puis nous avons, par exemple,

$$\begin{aligned}\text{(II.84')} \quad F_3^2 &= \frac{1}{1 - v^2} [F_1^2 (v_1^2 + v_2^2) + \\ &\quad + F_2^2 (1 + v_3)^2 - 2 F_1 F_2 (v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha) (1 + v_3)].\end{aligned}$$

Les coefficients de F_1^2 et F_2^2 sont positifs et le discriminant est encore négatif :

$$\begin{aligned}\Delta'_{F_3} &= (1 + v_3)^2 [(v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha)^2 - (v_1^2 + v_2^2)] \\ &= (1 + v \cos \mu)^2 v_2^2 \sin^2 \mu [\cos^2 (\alpha - \theta) - 1] \leq 0\end{aligned}$$

et, par suite, (II.84') définit bien F_3 ; nous obtenons F_4 de la même manière.

Donc, à toute solution de (II.E') nous pouvons faire correspondre une solution de (II.E'') de telle sorte que le vecteur-courant, calculé à partir de la somme de ces deux solutions, obéisse au théorème du guidage.

A ce sujet, il est remarquable que les solutions de (II.E') sont caractérisées par F_1, F_2 et $S_1 - S_2$ et non par S_1 et S_2 séparément; il en est de même des solutions de (II.E'').

Remarquons aussi que nos calculs et conclusions ne sont valables que pour $v \leq 1$.

9. Résolution des équations de Dirac dans le cas où $k = 0$. — Dans ce cas, (II.E) devient $\gamma^\sigma P_\sigma \psi = 0$ ou, plus explicitement,

$$\begin{aligned}\text{(II.E}_0\text{)} \quad & (P_1 + i P_2) \psi_3 - (P_3 - P_4) \psi_4 = 0, \\ & (P_1 - i P_2) \psi_4 + (P_3 + P_4) \psi_3 = 0, \\ & (P_1 - i P_2) \psi_1 - (P_3 - P_4) \psi_2 = 0, \\ & (P_1 + i P_2) \psi_2 + (P_3 + P_4) \psi_1 = 0;\end{aligned}$$

(II.E) se décompose donc en deux systèmes distincts. Nous constatons, d'autre part, que le raisonnement qui nous a permis de démontrer l'équivalence entre les systèmes (II.E), (II.E') et (II.E'') n'est plus possible. Cependant nous pouvons encore procéder comme suit. Partons du système (II.F) où $k = 0$, soit

$$\text{(II.F}_0\text{)} \quad \gamma^\sigma \gamma^\sigma P_\rho P_\sigma U = 0$$

et soit $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ une solution de (II.F₀), u_1 et u_2 ou u_3 et u_4 pouvant être nuls.

Si nous prenons $\psi = \gamma^\sigma P_\rho U$, le système (II.F₀) montre alors que ψ vérifie l'équation

$$\text{(II.88)} \quad \gamma^\sigma P_\sigma \psi = 0,$$

qui n'est autre que le système (II.E₀).

Donc il n'y a pas de système équivalent à (II. E₀), mais il est possible de faire correspondre à toute solution de (II. F₀) une solution de (II. E₀).

La résolution de (II. F₀) ne présente aucune difficulté majeure, car la forme générale des équations de (II. F₀) est identique à celle des équations de (II. F); par suite, toutes les conclusions concernant les solutions de (II. E) sont encore valables pour (II. E₀). Mais le fait que nous ne pouvons pas trouver de système équivalent à (II. E₀) entraîne que (II. E₀) possède d'autres solutions que (II. 88); effectivement nous avons trouvé d'autres solutions (cf. *C. r. Ac. Sc.*, t. 246, 1958, p. 1673).

III. Etude des lignes de courant de Dirac dans le cas des solutions à singularité ponctuelle et interprétation physique

1. **Solutions à singularité ponctuelle, vecteur-courant de Dirac et spin.** — Au chapitre précédent nous avons trouvé des solutions singulières des équations de Dirac, dont la singularité ponctuelle parcourt une trajectoire l'quelconque donnée, suivant une loi également donnée. D'une manière plus précise, nous avons montré que nous pouvons développer certaines fonctions u_σ sous la forme

$$(III.1) \quad u_\sigma = (\omega_{\sigma,0}/D) + \omega_{\sigma,1} + \omega_{\sigma,2} D + \dots + \omega_{\sigma,n} D^{n-1} + \dots,$$

en posant

$$(III.2) \quad \omega_{\sigma,0} = F_{\sigma,0} \exp(i S_{\sigma,0}).$$

Nous savons que les $F_{\sigma,0}$ et les $S_{\sigma,0}$ au point singulier $M(t)$ doivent satisfaire les équations

$$(III.3) \quad (g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D \partial_\sigma F_{\sigma,0})_{M(t)} = 0, \quad [g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D (\partial_\sigma S_{\sigma,0} - B_\sigma)]_{M(t)} = 0.$$

Si alors nous désignons par $\mathbf{U}$ une des valeurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ suivantes

$$(III.4) \quad \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}'' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ sont respectivement des solutions de (II. E'_{12}) et de (II. E'_{34}), nous pouvons écrire les solutions des équations de Dirac sous la forme

$$(III.5) \quad \psi = (\gamma^\sigma P_\sigma + k) \mathbf{U}.$$

Les équations de Dirac n'imposent aucune autre condition de guidage que celles découlant des relations (II.3); en conséquence les phases des u_σ obéissent à un théorème de guidage « faible » semblable à celui des équations scalaires, à savoir qu'au point singulier,

$$(III.6) \quad [\partial_\alpha S_{\sigma,0} - B_\alpha]_{M(t)} = P_\sigma v_\alpha.$$

Nous savons aussi que l'équation de continuité appliquée au vecteur-courant de Dirac, calculé à partir des solutions (III.5), est automatiquement vérifiée et, par suite, n'impose aucune autre condition.

Le problème est donc de savoir ce que représente le vecteur-courant de Dirac dans le cas des solutions singulières et la signification du théorème du guidage imposé à ce courant par M^r L. de Broglie.

Pour cela rappelons brièvement les propriétés du vecteur-courant et celles du spin. Calculons les composantes du spin :

$$(III.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} \gamma^2 \gamma^3 &= \mathbf{i} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{i} \gamma^3 \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{i} \gamma^1 \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{i} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$(III.8) \quad \left\{ \begin{aligned} s_1 &= (\mathbf{h}/4 \pi) \mathbf{i} \psi^+ \gamma^2 \gamma^3 \psi \\ &= (\mathbf{h}/4 \pi) (\psi_1 \psi_2^* + \psi_1 \psi_2^* - \psi_3 \psi_4^* - \psi_3^* \psi_4), \\ s_2 &= (\mathbf{h}/4 \pi) \mathbf{i} \psi^+ \gamma^3 \gamma^1 \psi \\ &= (\mathbf{h}/4 \pi) \mathbf{i} (\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2 + \psi_3 \psi_4^* - \psi_3^* \psi_4), \\ s_3 &= (\mathbf{h}/4 \pi) \mathbf{i} \psi^+ \gamma^1 \gamma^2 \psi \\ &= (\mathbf{h}/4 \pi) (\psi_1 \psi_1^* - \psi_2 \psi_2^* - \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*), \\ s_4 &= (\mathbf{h}/4 \pi) \mathbf{i} \psi^+ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \psi \\ &= (\mathbf{h}/4 \pi) (\psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* - \psi_3 \psi_3^* - \psi_4 \psi_4^*). \end{aligned} \right.$$

Par comparaison aux relations (II.77) et (II.78) nous trouvons

$$(III.8') \quad \vec{s} = (\mathbf{h}/4 \pi) (\vec{a} - \vec{b}).$$

Si nous désignons par $s_{u'}^\sigma$, $s_{u''}^\sigma$ et s_u^σ , les composantes du spin calculées respectivement à partir de $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ et $\mathbf{u}$, il est visible qu'au point singulier nous avons

$$(III.9) \quad (s_{u'}^\sigma)_{M(t)} \sim (\mathbf{h}/4 \pi) (j_{u'}^\sigma)_{M(t)},$$

$$(III.9') \quad (s_{u''}^\sigma)_{M(t)} \sim -(\mathbf{h}/4 \pi) (j_{u''}^\sigma)_{M(t)}.$$

Mais il n'existe aucune relation particulière entre $\vec{s}_u$ et $\vec{j}_u$, si ce n'est la relation générale de conjugaison par rapport au cône de lumière.

Les relations (III.9) et (III.9') nous font penser au fait que le spin est couché sur la vitesse quand celle-ci atteint la vitesse de la lumière et nous savons que, dans le cas des solutions correspondant à $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$, le vecteur-courant au point singulier est sur le cône de lumière.

Rappelons, d'autre part, qu'au point singulier le vecteur-courant a ses composantes équivalentes aux expressions

$$(III.10) \quad j^\sigma \sim (1/D^4) [\delta \lambda^\sigma - 2 X^\sigma (\lambda^\alpha X_\alpha)],$$

avec

$$(III.11) \quad \lambda^\sigma = -U_0^+ \gamma^4 \gamma^\sigma U_0,$$

où U_0 a une des valeurs ci-dessous

$$(III.11') \quad \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \end{bmatrix}.$$

Il est intéressant de faire les quelques constatations suivantes.

1. Dans tout ce qui suit le raisonnement est aussi valable pour $k = 0$. En effet, nous avons vu que dans ce cas les solutions des équations de Dirac peuvent s'écrire sous la forme

$$(III.5') \quad \psi = (\gamma^\sigma P_\sigma) U_{k=0},$$

où $U_{k=0}$ est solution de (II. E₁₂) et de (II. E₃₄) dans lesquelles nous avons fait $k=0$. Or les $(s^\sigma)_{M(t)}$ ne dépendent pas de k et il en est de même des formules (III.10).

2. Le vecteur de composantes λ^σ qui joue un rôle très important dans le calcul des valeurs principales des composantes du courant au point singulier est indépendant :

a) de la valeur de k , car U_0 ne dépend que des $\omega_{\sigma,0}$ uniquement déterminés par les équations (III.3) qui sont elles-mêmes indépendantes de k ;

b) des B_σ ; en effet, les λ^σ ne dépendent que de $F_{\sigma,0}$ et de $S_{\alpha,0} - S_{\beta,0}$; or, les équations qui déterminent $F_{\sigma,0}$ [les premières équations (II.3)] sont indépendantes des B_σ ; d'autre part, des dernières équations (II.3) nous déduisons

$$(III.3') \quad g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D (\partial_\sigma S_{\alpha,0} - B_\sigma) = 0, \quad g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D (\partial_\sigma S_{\beta,0} - B_\sigma) = 0,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(III.3'') \quad [g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma D \partial_\sigma (S_{\alpha,0} - S_{\beta,0})]_{M(t)} = 0;$$

$S_{\alpha,0} - S_{\beta,0}$ est bien indépendant des B_σ et, par suite, les λ^σ sont bien indépendants des B_σ .

3. Si nous désignons par $j_{u'_0}^\sigma$, $j_{u''_0}^\sigma$ et $j_{u_0}^\sigma$ les valeurs principales des j_u^σ au point $M(t)$ dans les cas où nous calculons ces vecteurs à partir respectivement de u , u'' et u nous allons démontrer que

$$(III.12) \quad (j_{u_0}^\sigma)_{M(t)} \sim (j_{u'_0}^\sigma + j_{u''_0}^\sigma)_{M(t)}.$$

En effet, si nous désignons par $\lambda_{u'}^\sigma$, $\lambda_{u''}^\sigma$ et λ_u^σ les valeurs des λ^σ données par (III.11) quand nous aurons remplacé successivement U_0 par u'_0 , u''_0 et u_0 de (III.11'), du fait de notre choix des matrices γ^σ nous pouvons constater facilement que

$$(III.12') \quad \lambda_u^\sigma = \lambda_{u'}^\sigma + \lambda_{u''}^\sigma$$

et comme, d'autre part, l'expression (III.10) est linéaire en λ^σ il en résulte que nous aurons nécessairement l'égalité (III.12) au point singulier.

2. Etude des lignes de courant. — Pour simplifier les calculs, nous allons opérer dans le système propre de la singularité. Nous prenons, par exemple, une singularité du type pôle à symétrie sphérique et soit

$$(III.13) \quad D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r.$$

Nous allons étudier les lignes de courant en deux étapes : tout d'abord, nous ne considérerons que les termes principaux du quatrième ordre en D des j^σ en supposant les autres négligeables. Puis, pour avoir un peu plus de précision, nous garderons les termes des quatrième et troisième ordres des j^σ .

1. Lignes de courant quand on ne garde que les termes du quatrième ordre des j^σ . —

A) SOLUTIONS u' . — Alors,

$$\lambda'^1 = \omega_1 \omega_2^* + \omega_1^* \omega_2, \quad \lambda'^2 = -i (\omega_1 \omega_2^* - \omega_1^* \omega_2),$$

$$\lambda'^3 = \omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^*, \quad \lambda'^4 = \omega_1 \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^*.$$

Pour simplifier les calculs nous avons omis volontairement de mettre les indices 0 aux $\omega_{\sigma,0}$. Nous ne restreignons pas la généralité de nos calculs en orientant le

vecteur $\vec{\lambda}'$ de composantes λ'^i , dans la direction Oz par exemple : il suffit pour cela de rendre nulle soit ω_1 , soit ω_2 . Si $\omega_1 = 0$, nous avons

$$(III.14) \quad \lambda'^3 = -\lambda'^4 = -\omega_2 \omega_2^*, \quad \lambda'^1 = \lambda'^2 = 0;$$

si $\omega_2 = 0$,

$$(III.15) \quad \lambda'^3 = \lambda'^4 = \omega_1 \omega_1^*, \quad \lambda'^1 = \lambda'^2 = 0.$$

Nous verrons tout à l'heure les significations de (III.14) et (III.15). Dans le cas présent $\delta = 1$ et, par suite,

$$(III.16) \quad \begin{aligned} j'^1 &\sim \frac{1}{r^6} (-2xz\lambda'^3), & j'^2 &\sim \frac{1}{r^6} (-2yz\lambda'^3), \\ j'^3 &\sim \frac{1}{r^6} (r^2 - 2z^2)\lambda'^3, & j'^4 &\sim \frac{1}{r^6} (r^2\lambda'^4), \end{aligned}$$

d'où les équations des lignes de courant aux environs du point singulier :

$$(III.17) \quad -\frac{dx}{2xz\lambda'^3} = -\frac{dy}{2yz\lambda'^3} = \frac{dz}{(r^2 - 2z^2)\lambda'^3} = \frac{dt}{r^2\lambda'^4}.$$

Les deux premières équations donnent la forme générale des lignes de courant, la dernière donne la vitesse et le sens de parcours de ces lignes de courant.

La résolution de (III.17) est immédiate et nous avons successivement

$$(III.17') \quad \frac{x dx + y dy}{-2z(x^2 + y^2)} = \frac{x dx + y dy + z dz}{-z(x^2 + y^2 + z^2)}$$

et

$$(III.17'') \quad dx/x = dy/y;$$

de (III.17') nous tirons

$$(III.18) \quad r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2} = 2R\rho, \text{ en posant } \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et de (III.17'')

$$(III.19) \quad y = \alpha x.$$

Nous voyons facilement que (III.18) représente une famille de tores d'axe Oz (dans le cas général d'axe $\vec{\lambda}'$) et dont les génératrices sont des circonférences tangentes en O à Oz ; (III.19) indique que les lignes de courant sont les génératrices elles-mêmes de cette famille de tores. Enfin de (III.17) nous tirons

$$(III.20) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{r^2 - 2z^2}{r^2} \frac{\lambda'^3}{\lambda'^4} = -\frac{\rho}{R} \frac{\lambda'^3}{\lambda'^4},$$

d'où au point O

$$(III.21) \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad (dz/dt)_O = \lambda'^3/\lambda'^4 = \pm 1;$$

par suite, nous avons les images suivantes, en remarquant que les lignes de courant sont parcourues à la vitesse de la lumière : $\omega_2 = 0$, $\omega_1 \neq 0$, cas (III.15),

$$(III.22) \quad \lambda'^3 = \omega_1 \omega_1^* > 0, \lambda'^4 = \omega_1 \omega_1^* > 0, \lambda'^3/\lambda'^4 = 1, (dz/dt)_O = 1;$$

$\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$, cas (III.14),

$$(III.23) \quad \lambda'_3 = -\omega_2 \omega_2^* < 0, \lambda'_4 = \omega_2 \omega_2^* > 0, \lambda'_3/\lambda'_4 = -1, (dz/dt)_O = -1.$$

Les figures 1 et 2 se résument en une seule : si nous nous fixons non seulement la direction mais aussi le sens de $\vec{\lambda}'$, nous voyons que les lignes de courant sont parcourues dans le sens de $\vec{\lambda}'$.

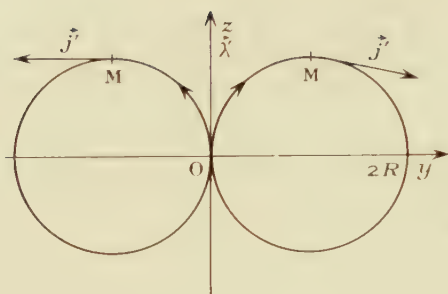


FIG. 1.

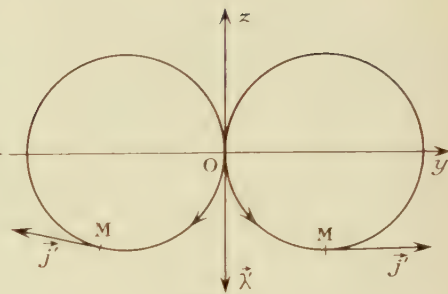


FIG. 2.

B) SOLUTIONS $\mathbf{u}''$. — Alors

$$(III.24) \quad \begin{aligned} \lambda''^1 &= \omega_3 \omega_4^* + \omega_3^* \omega_4, & \lambda''^2 &= i(\omega_3 \omega_4^* - \omega_3^* \omega_4), \\ \lambda''^3 &= \omega_3 \omega_3^* - \omega_4 \omega_4^*, & \lambda''^4 &= \omega_3 \omega_3^* + \omega_4 \omega_4^*. \end{aligned}$$

De nouveau, nous pouvons orienter λ'' dans la direction Oz en faisant soit $\omega_3 = 0$, soit $\omega_4 = 0$. Puis des calculs identiques à ceux du cas précédent conduisent aux mêmes résultats et nous obtenons des images identiques.

Ainsi apparemment les solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ conduisent au même résultat. Mais la relation (III.12) n'est valable que si nous ajoutons une solution $\mathbf{u}'$ à une solution $\mathbf{u}''$. Alors si nous ajoutons, par exemple, deux solutions $\mathbf{u}'$ nous obtenons encore un vecteur-courant sur le cône de lumière et nous parvenons seulement à changer la direction et le sens de λ' . Mais, par contre, si nous ajoutons une solution $\mathbf{u}'$ à une solution $\mathbf{u}''$, la relation (III.12) est valable et nous allons voir qu'il est alors possible de choisir $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ pour que les vecteurs-courants soient opposés et, par suite, de satisfaire le théorème du guidage de M^r L. de Broglie. Donc même à ce stade d'approximation les solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ ne sont pas totalement identiques.

C) SOLUTIONS $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. — Dans ce cas nous avons la relation (III.12). D'autre part, comme les lignes de courant pour $\vec{j}'$ et $\vec{j}''$ sont identiques, nous pouvons raisonner géométriquement.

Orientons encore $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}' + \vec{\lambda}''$ dans la direction Oz ; nous pouvons toujours considérer que les vecteurs $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ sont aussi dans la direction de Oz ; deux cas peuvent alors se présenter.

a) $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ sont de même sens, par exemple dans le sens des z positifs. Alors les familles de tores correspondant aux solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ sont identiques; donc les vecteurs-courants $\vec{j}'$ et $\vec{j}''$ sont portés par la même droite tangente à la génératrice passant par ce point; mais comme les $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ sont de même sens, les vecteurs-courants sont aussi de même sens. Enfin comme $\vec{j}'$ et $\vec{j}''$ sont sur le cône de lumière, $\vec{j}' + \vec{j}''$ est aussi sur le cône de lumière; il est donc impossible de satisfaire le théorème du guidage dans ce cas.

C'est ce qui se passe par exemple pour

$$(III.25) \quad \omega_2 = \omega_4 = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \omega_3 = 0.$$

b) $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ sont de sens inverses. Alors les vecteurs $\vec{j}'$ et $\vec{j}''$ en un point M sont toujours tangents à la même circonférence ligne de courant passant par ce point, mais de sens inverses du moins en ce qui concerne les composantes d'espace. Nous

voyons alors qu'il est possible de satisfaire le théorème du guidage dans les cas ci-dessous :

$$(III.26) \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, |\omega_1| = |\omega_4| \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \omega_4 = 0, |\omega_2| = |\omega_3|.$$

Il est alors facile de vérifier que les composantes d'espace de $\vec{j}$ sont nulles.

En ce qui concerne le spin d'après (III.9) et (III.9') les « lignes de spin » sont identiques aux lignes de courant mais le parcours se fait en sens inverse en ce qui concerne les solutions u'' . Il est facile de voir que dans le cas (III.25) le spin peut être nul du moins en ce qui concerne ses composantes d'espace si, de plus, nous avons

$$(III.25') \quad \omega_2 = \omega_1 = 0, |\omega_1| = |\omega_4| \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, |\omega_2| = |\omega_3|.$$

Par contre, dans le cas (III.26) le spin est essentiellement différent de 0.

2. *Lignes de courant quand on garde les termes des quatrième et troisième ordres des composantes du vecteur-courant.* — A) SOLUTIONS u' . — Nous pouvons, sans restreindre la généralité de notre étude, prendre $\omega_2 = 0$. Reprenons les égalités (II.68), soit

$$(III.27) \quad \begin{aligned} j^p = (1/D^4) [& \delta \lambda^p - 2 X^p (\lambda^\alpha X_\alpha)] + \\ & + (1/D^3) [\Omega_0^+ g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha X_\sigma (\partial_\alpha \Omega_0 - i B_\alpha \Omega_0) + \\ & + (\partial_\sigma \Omega_0^+ + i B_\sigma \Omega_0^+) g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\alpha] + \\ & + (k/D^3) (\Omega_0^+ g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma \gamma^4 \gamma^p \Omega_0 X_\sigma + \Omega_0^+ \gamma^4 \gamma^p \gamma^\alpha \Omega_0 X_\alpha), \end{aligned}$$

où les termes en D^{-4} sont écrits d'après les égalités (III.10). De plus, ici

$$(III.28) \quad \Omega_0 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(III.28') \quad \partial_\alpha \omega_1 - i B_\alpha \omega_1 = [\partial_\alpha F_1 + i F_1 (\partial_\alpha S_1 - B_\alpha)] \exp(i S_1),$$

en prenant pour ω_1 la définition (III.2) où nous avons supprimé les indices 0.

D'autre part comme la singularité est immobile et que nous ne considérons que les termes d'ordre 3 et au-dessus, seule la quatrième dérivée (III.28') est différente de 0 et nous posons

$$(III.28'') \quad \begin{aligned} \partial_4 \omega_1 - i B_4 \omega_1 &= [\partial_4 F_1 + i F_1 (\partial_4 S_1 - B_4)] \exp(i S_1) \\ &= (\partial_4 F_1 + i F_1 \rho_1) \exp(i S_1), \end{aligned}$$

où

$$(III.28''') \quad \rho_1 = \partial_4 S_1 - B_4.$$

Puis en examinant le tableau des matrices formées en multipliant les γ^n entre eux, nous remarquons que, Ω_0 étant donné par (III.28) et d'après (III.28''), seules les quantités calculées à partir des matrices 1 , $-\gamma^4 \gamma^3$, $i \gamma^1 \gamma^2$ et $i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ sont différentes de 0.

$-\gamma^4 \gamma^3$ et 1 donnent λ^3 et λ^4 respectivement ; $i \gamma^1 \gamma^2$ et $i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ sont les composantes sur Oz et de temps d'un certain vecteur qui s'apparente au spin par le remplacement de ψ par Ω_0 ; en posant $\vec{\sigma}'$ de composantes

$$(III.29) \quad \sigma'^1 = \sigma'^2 = 0, \quad \sigma'^3 = i \Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^2 \Omega_0, \quad \sigma'^4 = i \Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \Omega_0,$$

nous obtenons finalement

$$(III.30) \quad \begin{cases} j'^1 = (1/D^6) (-2xz\lambda'^3 - 2\rho_1\sigma'^3 y r^2 + \epsilon_4\lambda'^4 x r^2), \\ j'^2 = (1/D^6) (-2yz\lambda'^3 + 2\rho_1\sigma'^3 x r^2 + \epsilon_4\lambda'^4 y r^2), \\ j'^3 = (1/D^6) [(r^2 - 2z^2)\lambda'^3 + \partial_4\lambda'^4 z r^2], \\ j'^4 = (1/D^6) (r^2\lambda'^4 - \partial_4\lambda'^3 z r^2). \end{cases}$$

Ici encore il est possible d'intégrer complètement les équations des lignes de courant, nous ne le faisons pas ici car les calculs n'apportent rien de nouveau. Mais, par contre, il est très intéressant d'examiner de plus près les formules (III.30). En effet, par comparaison à (III.16), nous trouvons (pour les composantes d'espace) que

a) par rapport à (III.16), (III.30) contient les termes de (III.16) avec, en plus, un terme $\epsilon_4\lambda'^4 x^i r^2$ qui est un vecteur contenu dans le plan passant par Oz et possédant une symétrie sphérique et, à fortiori, une symétrie de révolution autour de Oz. Donc ce terme apporte seulement une petite déformation aux circonférences génératrices des tores. Donc les lignes de courant sont des courbes tracées sur des surfaces de révolution autour de Oz et dont les génératrices sont des circonférences légèrement déformées, tangentes en O à Oz. Nous les appelons des pseudo-tores.

D'ailleurs, il est possible de supprimer cette déformation en faisant $\epsilon_4\lambda'^4 = 0$, soit, par exemple, en prenant $F_1 = \text{Cte}$.

b) (III.30) contient en outre un terme de rotation

$$(III.31) \quad 2\rho_1 \vec{\sigma}' \wedge \vec{r},$$

$\vec{\sigma}'$ ayant pour composantes (III.29) et, en particulier,

$$(III.31') \quad \sigma'^3 = i\Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^2 \Omega_0 = \omega_1 \omega_1^*.$$

Donc les lignes de courant de Dirac ne sont plus des courbes planes mais des courbes qui s'enrouleraient en spirale autour des cercles moyens des pseudo-tores ou, ce qui revient au même, des courbes décrites par la composition des deux mouvements suivants : le mobile décrit une génératrice d'un des pseudo-tores, en même temps ce pseudo-tore tournerait autour de Oz.

Remarquons tout de suite que le vecteur rotation d'ensemble $2\rho_1 \vec{\sigma}'$ est porté par $\vec{\sigma}'$ qui est un vecteur s'apparentant au spin et, d'autre part, qu'il est proportionnel à ρ_1 donné par (III.28^b). C'est donc une quantité qui s'apparente à une énergie : il semble donc que la rotation est d'autant plus rapide que l'énergie de la particule est plus grande.

B) SOLUTIONS u'' . — Pour pouvoir comparer nos résultats à ceux du paragraphe précédent, nous prenons un vecteur $\vec{\lambda}''$ dans le même sens que $\vec{\lambda}'$, c'est-à-dire que $\omega_4 = 0$ et, par suite,

$$(III.32) \quad \Omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \rho_3 = \partial_4 S_3 - B_4.$$

Puis un calcul analogue en tous points à celui que nous venons de faire, conduit aux résultats suivants :

$$(III.33) \quad \begin{cases} j''^1 = (1/D^6) (-2 x z \lambda''^3 - 2 \rho_3 \sigma''^3 y r^2 + \partial_4 \lambda''^4 x r^2), \\ j''^2 = (1/D^6) (-2 y z \lambda''^3 + 2 \rho_3 \sigma''^3 x r^2 + \partial_4 \lambda''^4 y r^2), \\ j''^3 = (1/D^6) [(r^2 - 2 z^2) \lambda''^3 + \partial_4 \lambda''^4 z r^2], \\ j''^4 = (1/D^6) (r^2 \lambda''^4 - \partial_4 \lambda''^3 z r^2), \end{cases}$$

avec ici

$$(III.33') \quad \begin{aligned} \lambda''^3 &= \lambda''^4 = \omega_3 \omega_3^* = (F_3)^2, & \partial_4 \lambda''^3 &= \partial_4 \lambda''^4 = 2 F_3 \partial_4 F_3, \\ \sigma''^1 &= \sigma''^2 = 0, & \sigma''^3 &= -\omega_3 \omega_3^* = -(F_3)^2. \end{aligned}$$

L'examen des formules (III.33) et (III.33') nous conduit à des conclusions semblables à celles du paragraphe précédent sauf que, d'après la troisième formule (III.33'), $\vec{\sigma}'$ est de sens opposé à $\vec{\sigma}'$; donc si ρ_1 et ρ_3 sont de même signe, c'est-à-dire si nous considérons des solutions à énergie de même signe, soit positive par exemple, nous voyons que les deux familles de pseudo-tors correspondantes respectivement aux solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ tourneraient en sens inverses l'un de l'autre. dans l'exemple choisi la première dans le sens direct, la seconde dans le sens opposé.

De plus, si nous considérons les solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ dans le cas où

$$(III.34) \quad |\omega_1| = |\omega_3| \quad \text{ou} \quad F_1 = F_3,$$

d'où $\vec{\lambda}' = \vec{\lambda}''$, $\partial_4 \lambda'^3 = \partial_4 \lambda'^4 = \partial_4 \lambda''^3 = \partial_4 \lambda''^4$ et, dans le cas où les solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ possèdent la même énergie, soit

$$(III.34') \quad \rho_1 = \rho_3 \quad \text{ou} \quad \partial_4 S_1 = \partial_4 S_3,$$

alors il est visible que les deux familles de pseudo-tors sont identiques et que les rotations sont égales et de sens opposés. Ces faits nous font penser aux relations (III.9) et (III.9'). Nous y reviendrons dans un instant.

C) SOLUTIONS $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. — Nous nous contenterons seulement d'étudier les cas où les vecteurs $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ ont la même direction, c'est-à-dire en définitive nous allons étudier les deux cas suivants :

$\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ de même sens, soit le sens positif des z et alors

$$(III.35) \quad \omega_2 = \omega_4 = 0, \quad \Omega_0 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, $\lambda^3 = \lambda^4 = \omega_1 \omega_2^* + \omega_1 \omega_3^*$;

$\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$ de sens opposés, soit alors

$$(III.35') \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \Omega_0 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_4 \end{bmatrix},$$

d'où $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, $\lambda^3 = \omega_1 \omega_1^* - \omega_4 \omega_4^*$, $\lambda^4 = \omega_1 \omega_1^* + \omega_4 \omega_4^*$.

Dans les deux cas ci-dessus, si nous calculons les composantes d'espace du vecteur-courant de Dirac, nous trouvons d'autres termes en plus des composantes de $\vec{j}'$ et de $\vec{j}''$. En effet, en examinant de nouveau le tableau des matrices formées en multipliant entre elles les matrices γ^σ , nous constatons, du fait de notre choix de Ω_0 donné par (III.35) ou (III.35'), que les quantités calculées à partir des matri-

ces $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \gamma^1 \gamma^3 \gamma^2, \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2, \gamma^3$ ne sont plus nulles. Ces quantités s'apparentent aux composantes des moments électriques et magnétiques propres de la particule. Plus précisément encore, si nous désignons par $\vec{\mu}$ le vecteur de composantes $\mu_1 = \Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \Omega_0, \mu_2 = \Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^3 \gamma^2 \Omega_0, \mu_3 = \Omega_0^+ \gamma^1 \gamma^2 \Omega_0$, c'est-à-dire quelque chose qui s'apparente au moment magnétique propre, nous constatons que j contient un autre terme de rotation

$$(III.36) \quad 2 k \vec{\mu} \wedge \vec{r}.$$

Ce terme était nul pour une solution $\mathbf{u}'$ ou $\mathbf{u}''$: il est donc le résultat d'une sorte d'inter réaction électromagnétique entre les solutions $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$.

a) *Cas* (III.35). — Nous savons que le courant ne peut pas être nul. D'autre part, les axes de rotation d'origines spinorielle et électromagnétique sont perpendiculaires entre eux ; l'axe $\vec{\sigma}$ est porté par Oz et l'axe $\vec{\mu}$ est dans le plan xOy ; d'ailleurs nous avons $\sigma^1 = \sigma^2 = 0, \quad \sigma^3 = \rho_1 \omega_1 \omega_1^* - \rho_3 \omega_3 \omega_3^*,$

$$\mu^1 = -i(\omega_1 \omega_3^* - \omega_1^* \omega_3), \quad \mu^2 = -(\omega_1 \omega_3^* + \omega_1^* \omega_3), \quad \mu_3 = 0.$$

Nous voyons aussi que μ^1 et μ^2 ne peuvent s'annuler en même temps que pour $\omega_1 = \omega_3 = 0$, conditions qui, combinées avec (III.35), donnent une solution non singulière. Donc les lignes de courant sont des courbes décrites par la composition des deux mouvements ci-dessous :

un point décrit les génératrices des pseudo-tores ;

les pseudo-tores tournent autour de l'axe $-2 k \vec{\mu} - 2 \vec{\sigma}$ et il est visible que cet axe peut être variable avec le temps.

Donc, dans ce cas, les lignes de courant sont des courbes qui sont tangentes (dans le cas où nous avons affaire à des vrais tores) intérieurement à des sphères et qui passent aussi par le point O.

b) *Cas* (III.35'). — Nous allons écrire explicitement les composantes de $\vec{j}$:

$$(III.37) \quad \begin{cases} j^1 = (1/r^6) (-2 x z \lambda^3 - 2 \sigma^3 y r^2 + 2 k \mu^3 y r^2 + \partial_4 \lambda^4 x r^2), \\ j^2 = (1/r^6) (-2 y z \lambda^3 + 2 \sigma^3 x r^2 - 2 k \mu^3 x r^2 + \partial_4 \lambda^4 y r^2), \\ j^3 = (1/r^6) [(r^2 - 2 z^2) \lambda^3 + \partial_4 \lambda^4 z r^2], \\ j^4 = (1/r^6) (r^2 \lambda^4 - \partial_4 \lambda^3 z r^2 - 2 k \Pi^3 z), \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(III.38) \quad \begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = 0, & \lambda^3 = \omega_1 \omega_1^* - \omega_4 \omega_4^*, & \lambda^4 = \omega_1 \omega_1^* + \omega_4 \omega_4^*, \\ \sigma^1 = \sigma^2 = 0, & \sigma^3 = \rho_1 \omega_1 \omega_1^* + \rho_4 \omega_4 \omega_4^*, \\ \mu^1 = \mu^2 = 0, & \mu^3 = i(\omega_1 \omega_4^* - \omega_1^* \omega_4), \\ \Pi^1 = \Pi^2 = 0, & \Pi^3 = \Omega_0^+ \gamma^3 \Omega_0 = -(\omega_1 \omega_4^* + \omega_1^* \omega_4); \end{cases}$$

le vecteur $\vec{\Pi}$ est le vecteur qui s'apparente au moment électrique de la particule.

Nous voyons que la quantité qui s'apparente au moment magnétique propre a la même direction que Oz et, par suite, les axes de rotation d'ordre spinoriel et d'ordre électromagnétique coïncident et les lignes de courant sont des courbes décrites sur des pseudo-tores.

Nous pouvons annuler la rotation d'ordre électromagnétique, soit

$$(III.39) \quad \mu^3 = i(\omega_1 \omega_4^* - \omega_1^* \omega_4) = -2 F_1 F_4 \sin(S_1 - S_4) = 0;$$

or F_1 et F_4 sont différents de 0, d'où

(III.39')

$$S_1 = S_4 + n\pi$$

et alors

(III.39'')

$$\partial_4 S_1 = \partial_4 S_4 \quad \text{et} \quad \rho_1 = \rho_4;$$

mais, dans ce cas, d'après (III.38) il est impossible d'annuler σ^3 . Réciproquement si nous désirons avoir $\sigma^3 = 0$ il est nécessaire que ρ_1 et ρ_4 soient de signes différents, alors μ^3 est différent de 0. Il est donc impossible d'annuler simultanément les deux sortes de rotations.

Par contre, il est possible d'annuler l'ensemble des deux rotations ; il suffit que

$$(III.40) \quad \rho_1 F_1^2 + \rho_2 F_2^2 + 2k F_1 F_4 \sin(S_1 - S_4) = 0;$$

cette égalité est réalisée, par exemple, pour

$$(III.41) \quad \rho_1 = \rho_4 = k, \quad F_1 = F_4, \quad S_1 = S_4 + (\pi/2) + 2n\pi,$$

c'est-à-dire pour

$$(III.41') \quad \omega_4 = i\omega_1 \quad \text{et} \quad \partial_4 S_1 = \partial_4 S_4 = k.$$

En conclusion, nous pouvons annuler simultanément les termes des quatrième et troisième ordres des composantes d'espace du vecteur-courant de Dirac au point singulier en prenant, par exemple,

$$(III.42) \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad F_1 = F_4 = \text{Cte}, \\ S_4 = S_1 + (\pi/2) + 2n\pi, \quad \partial_4 S_4 = \partial_4 S_1 = k.$$

3. Construction d'un système de fonctions régulières approchant une somme de solutions singulières. — Nous pouvons reprendre presque en totalité les raisonnements de M^r Fer dans sa thèse (chap. V, § 7), sauf le début que nous pouvons exposer de la manière suivante.

Considérons une famille de solutions singulières de (II.E'₁₂), $u'_1, u'_2, \dots, u'_k, \dots, u'_n$ en nombre fini mais très grand ou infini dénombrable. Nous supposons que chacune de ces solutions u'_k possède une singularité ponctuelle qui décrit Γ_k faisant partie d'une famille discrète de trajectoires, celles-ci étant choisies dans une famille continue de trajectoires. La somme $\sum u'_k = u'$ est aussi solution de (II.E'₁₂).

Puis à chaque solution u'_k nous faisons correspondre une solution u''_k des équations (II.E''₃₄), de telle sorte que le vecteur-courant de Dirac calculé à partir de $u_k = u'_k + u''_k$ satisfasse le théorème du guidage de M^r L. de Broglie sur la trajectoire Γ_k . Alors la somme $\sum u''_k = u''$ est aussi solution de (II.E''₃₄) et soit $u = u' + u''$; il est visible que

$$(III.43) \quad \psi = (\gamma^\sigma P_\sigma + k)U$$

est une solution des équations de Dirac et que cette solution, qui possède l'ensemble des singularités des u'_k et des u''_k , vérifie le théorème du guidage en tout point des trajectoires Γ_k .

En effet, au voisinage d'un point de Γ_k par exemple, seules les fonctions de la solution u_k deviennent infinies et, par suite, jouent un rôle prépondérant ; or, la solution u_k vérifie le théorème du guidage sur Γ_k par construction.

Ensuite le raisonnement est identique à celui de M^r Fer pour la construction de fonctions approchant la solution u ; les difficultés d'intégration ne proviennent que des termes contenant des dérivées secondes de $1/D$ et ces termes sont identiques dans les équations scalaires et dans les équations (III.E'₁₂) et (III.E''₃₄).

4. **Solutions singulières et interprétation probabiliste.** -- Rappelons quelques idées de l'interprétation probabiliste.

1. Les opérateurs donnant les composantes d'espace du vecteur-courant de Dirac sont :

$$(III.44) \quad -c\gamma^4\gamma^1, \quad -c\gamma^4\gamma^2, \quad -c\gamma^4\gamma^3.$$

Ces opérateurs ont pour valeurs propres $\pm c$ et l'interprétation probabiliste exprime que les valeurs possibles de la mesure de la composante, suivant Oz par exemple, du vecteur-courant sont $\pm c$.

Si nous prenons, par exemple, la troisième composante du vecteur-courant, nous trouvons

$$(III.45) \quad j^3 = -c\psi^\dagger\gamma^4\gamma^3\psi = c(\psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^* + \psi_3\psi_3^* - \psi_4\psi_4^*)$$

et, suivant l'interprétation probabiliste, la probabilité d'avoir la valeur $+c$ est $\psi_1\psi_1^* + \psi_3\psi_3^*$, celle d'avoir la valeur $-c$ est $\psi_2\psi_2^* + \psi_4\psi_4^*$.

2. Les opérateurs correspondant aux composantes d'espace du spin sont :

$$(III.46) \quad (h/4\pi)\mathbf{i}\gamma^2\gamma^3, \quad (h/4\pi)\mathbf{i}\gamma^3\gamma^1, \quad (h/4\pi)\mathbf{i}\gamma^1\gamma^2.$$

Ces opérateurs ont pour valeurs propres $\pm h/4\pi$ et nous disons que les valeurs possibles de la mesure de la composante, suivant Oz par exemple, du spin sont $\pm h/4\pi$.

Si nous considérons la composante du spin, suivant Oz par exemple, nous trouvons

$$(III.47) \quad \sigma^3 = (h/4\pi)(\psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^* - \psi_3\psi_3^* + \psi_4\psi_4^*)$$

et nous disons que la probabilité d'avoir la valeur $h/4\pi$ est $\psi_1\psi_1^* + \psi_4\psi_4^*$ et la probabilité d'avoir la valeur $-h/4\pi$ est $\psi_2\psi_2^* + \psi_3\psi_3^*$.

Or, d'après ce que nous avons vu sur les solutions singulières, nous pouvons interpréter ces faits de la manière suivante.

Chaque solution u' ou u'' représenterait une particule, la solution u' représenterait une particule de spin $1/2$ et la solution u'' une particule de spin $-1/2$.

Pour les particules de spin $1/2$, par exemple, l'image que nous nous faisons est la suivante : la particule est composée d'une multitude de « points » microscopiques de « matière » qui s'enrouleraient hélicoïdalement autour des pseudo-tores ayant pour axe λ' que les équations de Dirac ne déterminent pas (l'enroulement se fait autour du cercle moyen du pseudo-tore).

Ce qu'il y a de remarquable c'est :

d'une part, que cette image ne provient pas d'une supposition quelconque, mais directement des calculs des lignes de courant aux environs de la singularité de la solution singulière ;

d'autre part, pour des particules électrisées, c'est le cas de l'électron par exemple, cette image fournit un modèle possible « autostable ». En effet, le mouvement des « points » de matière électrisée ressemblerait au parcours d'un courant électrique dans les spires enroulées autour des pseudo-tores. Ce courant engendre un champ magnétique circulaire autour de l'axe de rotation. A son tour ce champ magnétique maintiendrait les « points » électrisés dans leurs trajectoires.

Enfin les « points » électrisés atteignent la vitesse c quand ils passent au point singulier.

Il est évident que, quand une particule de ce modèle parcourt une trajectoire,

la symétrie est rompue, sauf dans le cas où l'axe des pseudo-tors reste tangent à la trajectoire. Mais la vitesse des « points » matériels au point singulier reste égale à c . Mais du fait que nous ignorons la direction et le sens exacts des axes des pseudo-tors, nous raisonnons de la manière suivante : la probabilité pour que cet axe soit dans une direction donnée dans le système propre est la même pour toutes les directions, la probabilité pour que, la direction étant donnée, cet axe soit dans un sens ou dans l'autre est encore la même, enfin la probabilité pour que cet axe fixé en direction et en sens corresponde à une particule de spin $1/2$ ou $-1/2$ est aussi la même. Il est alors évident que le mouvement « pseudo-torique » des « points » matériels s'équilibre, il ne reste que le mouvement d'ensemble de la particule et nous obtenons le théorème du guidage.

Cette interprétation permet en quelque sorte de faire voir « matériellement » le « tremblement de Schrödinger ».

L'interprétation de l'égalité (III.45) est semblable à celle de

$$(III.45') \quad \lambda^3 = c (\omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^* - \omega_3 \omega_3^* - \omega_4 \omega_4^*).$$

Si nous ne considérons que cette composante de $\lambda^3 = \lambda'^3 + \lambda''^4$, nous pouvons dire que ω_1 et ω_3 représentent respectivement les axes des pseudo-tors dans le sens des z positifs des particules à spins $1/2$ et $-1/2$ (dans le cas où nous nous plaçons dans le système propre) et si $\omega_1 \omega_1^*$ et $\omega_3 \omega_3^*$ sont proportionnels au nombre de ces particules, nous pouvons dire que le nombre des particules dont les axes sont dans le sens des z positifs est proportionnel à $\omega_1 \omega_1^* + \omega_3 \omega_3^*$. De même, nous pouvons dire que le nombre de particules de spins $1/2$ et $-1/2$ dont l'axe est dirigé dans le sens des z négatifs est proportionnel à $\omega_2 \omega_2^* + \omega_4 \omega_4^*$.

Or, au point singulier la vitesse des « points matériels » est égale à $\pm c$ suivant que l'axe est dirigé dans le sens positif ou négatif des z et, par suite, la valeur moyenne des vitesses des « points matériels » est proportionnelle à

$$c (\omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^* + \omega_3 \omega_3^* - \omega_4 \omega_4^*).$$

Ainsi se trouve justifié le fait que les valeurs propres de l'opérateur vitesse sont $\pm c$ et pourtant $\vec{j}$ ne se trouve pas sur le cône de lumière.

L'interprétation du spin se fait d'une manière analogue, soit :

la valeur du spin au point singulier est de $\pm \hbar/4 \pi$ mais, du fait que dans le système propre de la singularité nous ignorons la direction et le sens des axes des pseudo-tors, le spin mesuré par rapport à tout axe a toujours pour valeur $\pm \hbar/4 \pi$;

les solutions u' et les solutions u'' correspondent respectivement aux spins $1/2$ et $-1/2$ par rapport au sens des vecteurs $\vec{\lambda}'$ et $\vec{\lambda}''$.

Dans le système propre si nous mesurons le spin par rapport à Oz , nous trouvons :

solution u' ,

ω_1 donne une valeur proportionnelle à $(\hbar/4 \pi) \omega_1 \omega_1^*$,

ω_2 donne une valeur proportionnelle à $(\hbar/4 \pi) (-\omega_2 \omega_2^*)$;

solution u'' ,

ω_3 donne une valeur proportionnelle à $-(\hbar/4 \pi) \omega_3 \omega_3^*$,

ω_4 donne une valeur proportionnelle à $-(\hbar/4 \pi) (-\omega_4 \omega_4^*)$;

d'où, au total, la valeur du spin sera proportionnelle à

$$(\hbar/4 \pi) (\omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^* - \omega_3 \omega_3^* + \omega_4 \omega_4^*).$$

5. **Conclusion.** — Les équations (II.E') et (II.E'') qui sont équivalentes pour les solutions régulières ne le sont pas, d'après notre interprétation, pour les solutions singulières. Le système (II.E') correspondrait aux particules de spin 1/2 et (II.E'') aux particules de spin $-1/2$ mais, du fait de l'impossibilité de déterminer la direction et le sens des axes des pseudo-tors, nous ne pensons pas que cette séparation permette de tirer des conclusions pratiques au premier abord.

Par contre, dans une théorie où nous pouvons décrire chaque particule isolément il faudrait tout d'abord pouvoir déterminer la direction et le sens des axes des pseudo-tors et ensuite séparer les équations (II.E') et (II.E'').

Pour déterminer la direction et le sens des axes des pseudo-tors nous pouvons soit ajouter des termes non linéaires à nos équations, soit admettre que le champ extérieur présente lui-même une singularité ou une très grande intensité et que la particule se trouve aux environs de cette singularité. C'est ce qui se passe, par exemple, dans le noyau ou en cas de collision de deux particules. Inversement il serait intéressant d'étudier le modèle d'un électron de forme torique et dont les charges seraient mobiles sur ce tore.

IV. Etude de certains cas particuliers

1. **Equations avec champ extérieur.** — Dans le cas où les champs électrique et magnétique sont parallèles à une même direction, nous pouvons prendre cette direction comme axe Oz et le système (II.E'_{12}), par exemple, devient

$$(IV.1) \quad \begin{aligned} \square u_1 + 2 \mathbf{i} B^\sigma \partial_\sigma u_1 - l u_1 - (H_3 + \mathbf{i} E_3) u_1 &= 0, \\ \square u_2 - 2 \mathbf{i} B^\sigma \partial_\sigma u_2 - l u_2 + (H_3 + \mathbf{i} E_3) u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si nous posons $l_1 = l + H_3 + \mathbf{i} E_3$ et $l_2 = l - (H_3 + \mathbf{i} E_3)$, nous pouvons voir facilement que le système (IV.1) se décompose en deux équations définissant chacune u_1 et u_2 . Chacune de ces équations a été complètement intégrée par M^r Fer et nous trouvons pour u_1 et u_2 des solutions analogues aux quantités (I.48). Nous désignons par ω_1 et ω_2 les fonctions arbitraires que nous sommes obligé d'introduire; les fonctions $U[x^\sigma, \alpha(\tau), \tau]$ sont identiques, mais les fonctions U_1 sous le signe $\int$ non identiques sont facilement calculables. Donc

$$(IV.2) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\omega_1(\tau) U[x^\sigma, \alpha(\tau), \tau]}{D} - 2 \int_{-\infty}^{\tau} \omega_1(\theta) U_1[x^\sigma, \alpha^\sigma(\theta)] d\theta, \\ u_2 &= \frac{\omega_2(\tau) U[x^\sigma, \alpha(\tau), \tau]}{D} - 2 \int_{-\infty}^{\tau} \omega_2(\theta) U_2[x^\sigma, \alpha^\sigma(\theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les quantités définies par les relations (II.61) sont :

$$(IV.3) \quad \omega_{1,0} = \omega_1(\tau_0) U[x^\sigma, \alpha(\tau_0), \tau_0], \quad \omega_{2,0} = \omega_2(\tau_0) U[x^\sigma, \alpha(\tau_0), \tau_0],$$

où τ_0 est défini par (I.51). Enfin il est évident que les conclusions des chapitres II et III sont entièrement valables.

Naturellement nos conclusions sont aussi valables pour le système (II.E'').

2. **Equations sans champ extérieur.** — Alors les deux équations (IV.1) sont identiques et deviennent

$$(IV.4) \quad \square u_j - k^2 u_j = 0 \quad (j = 1, 2);$$

d'où les solutions (IV.2) identiques à la fonction arbitraire ω_j près, soit

$$(IV.2') \quad u_j = \frac{\omega_j(\tau)}{D} - k \int_{-\tau}^{\tau} \omega_j(\theta) \frac{J_1[\sqrt{(t-\theta)^2 - r^2}]}{\sqrt{(t-\theta)^2 - r^2}} d\theta, \\ r = \sqrt{\sum [x^i - a^i(\theta)]^2}.$$

Comme cas encore plus particulier de (IV.2') nous avons trouvé les solutions (I.56) et (I.56').

Retrouvons la solution proposée par M^r L. de Broglie dans son livre « Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire » (p. 204). Partons de la solution (IV.2') où $k' = k$ et en nous plaçant dans le système propre de la singularité, soit

$$(IV.2'') \quad u_j = (a_j/r) e^{ikt}, \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad j = 1, 2.$$

Comme la solution proposée par M^r L. de Broglie satisfait les conditions du théorème du guidage, nous devons considérer aussi une solution du système (II.E₃₄''), soit

$$(IV.4) \quad u_l = (a_l/r) e^{ikt} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad l = 3, 4).$$

Soit alors $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$. Nous considérons la solution des équations de Dirac

$$(IV.5) \quad \psi = (\gamma^\sigma \partial_\sigma + k)U;$$

par suite les équations (II.82') deviennent :

$$(IV.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 a_1^* + a_1 a_2^* + a_4 a_3^* + a_3 a_4^* = 0, \\ i(-a_2 a_1^* + a_1 a_2^* + a_4 a_3^* - a_3 a_4^*) = 0, \\ a_1 a_1^* - a_2 a_2^* + a_3 a_3^* - a_4 a_4^* = 0, \\ a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^* + a_4 a_4^* = \chi. \end{array} \right.$$

La résolution de (IV.6) ne présente aucune difficulté ; si nous posons $a_\sigma = \rho_\sigma \exp(i s_\sigma)$, nous trouvons les conditions

$$(IV.7) \quad \rho_4 = \rho_1, \quad \rho_3 = \rho_2$$

et

$$(IV.7') \quad s_3 - s_4 = \pi - (s_1 - s_2) + 2\pi n.$$

Parmi les solutions (IV.7') nous avons en particulier

$$(IV.7'') \quad s_4 = (\pi/2) \pm s_1, \quad s_3 = s_2 - (\pi/2),$$

ce qui donne

$$(IV.8) \quad a_4 = i a_1, \quad a_3 = -i a_2.$$

La solution de (IV.5) devient alors

$$(IV.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = i [a_1 z - a_2 (x + i y)] e^{ikt/r^3}, \\ \psi_2 = i [a_1 (x - i y) - a_2 z] e^{ikt/r^3}, \\ \psi_3 = [-a_1 (x - i y) + a_2 z] e^{ikt/r^3}, \\ \psi_4 = [a_1 z + a_2 (x + i y)] e^{ikt/r^3}. \end{array} \right.$$

A cause de notre choix des matrices γ^σ , les relations entre les solutions de nos équations et celles des équations choisies par M^r L. de Broglie sont :

$$(IV.10) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{i} \psi_4 - \psi_1), & \Phi_2 &= -\frac{1}{2} (\psi_2 + \mathbf{i} \psi_3), \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} (\psi_1 + \mathbf{i} \psi_4), & \Phi_4 &= \frac{1}{2} (\psi_2 - \mathbf{i} \psi_3) \end{aligned}$$

ou, en portant les valeurs de (IV.9),

$$(IV.10') \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= 0, & \Phi_3 &= \mathbf{i} [a_1 z + a_2 (x + \mathbf{i} y)] e^{\mathbf{i} k t / r^3}, \\ \Phi_2 &= 0, & \Phi_4 &= \mathbf{i} [a_1 (x - \mathbf{i} y) - a_2 z] e^{\mathbf{i} k t / r^3}. \end{aligned}$$

Enfin comme, dans le cas qui nous occupe, les équations de Dirac sont des équations linéaires à coefficients constants, les dérivées des solutions sont encore des solutions du système : en particulier si nous dérivons (IV.10') par rapport à z nous trouvons

$$(IV.10'') \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 0, & \varphi_3 &= \mathbf{i} \partial_z \{ [a_1 z + a_2 (x + \mathbf{i} y)] e^{\mathbf{i} k t / r^3} \}, \\ \varphi_2 &= 0, & \varphi_4 &= \mathbf{i} \partial_z \{ [a_1 (x - \mathbf{i} y) - a_2 z] e^{\mathbf{i} k t / r^3} \} \end{aligned}$$

ou, plus explicitement,

$$(IV.10'') \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 0, & \varphi_3 &= [-\mathbf{i} a_1 (2 z^2 - x^2 - y^2) - \mathbf{i} a_2 3 z (x + \mathbf{i} y)] e^{\mathbf{i} k t / r^5}, \\ \varphi_2 &= 0, & \varphi_4 &= [-\mathbf{i} a_1 3 z (x - \mathbf{i} y) + \mathbf{i} a_2 (2 z^2 - x^2 - y^2)] e^{\mathbf{i} k t / r^5}; \end{aligned}$$

en faisant soit $a_1 = 0$, soit $a_2 = 0$ nous retrouvons bien les solutions de M^r L. de Broglie.

3. Intégration complète des équations des lignes de courant. — Prenons la solution la plus simple du système (II. E')

$$(IV.11) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{a_1}{r} k e^{\mathbf{i} k t}, & \psi_3 &= [-a_1 (x - \mathbf{i} y) - a_2 z + \mathbf{i} k a_2 r^2] \frac{e^{\mathbf{i} k t}}{r^3}, \\ \psi_2 &= \frac{a_2}{r} k e^{\mathbf{i} k t}, & \psi_4 &= [a_1 z + a_2 (x + \mathbf{i} y) - \mathbf{i} k a_1 r^2] \frac{e^{\mathbf{i} k t}}{r^3}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant le vecteur-courant à partir de cette solution : pour cela posons

$$\begin{aligned} \lambda'^1 &= a_1 a_2^* + a_1^* a_2, & \lambda'^2 &= -\mathbf{i} (a_1 a_2^* - a_1^* a_2), \\ \lambda'^3 &= a_1 a_1^* - a_2 a_2^*, & \lambda'^4 &= a_1 a_1^* + a_2 a_2^* \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$(IV.12) \quad \begin{cases} j^1 = (1/r^6) [r^2 \lambda'^1 - 2 x (\lambda'^1 x + \lambda'^2 y + \lambda'^3 z)] + \\ \quad \quad \quad + (1/r^4) [2 k (z \lambda'^2 - y \lambda'^3)], \\ j^2 = (1/r^6) [r^2 \lambda'^2 - 2 y (\lambda'^1 x + \lambda'^2 y + \lambda'^3 z)] + \\ \quad \quad \quad + (1/r^4) [2 k (x \lambda'^3 - z \lambda'^2)], \\ j^3 = (1/r^6) [r^2 \lambda'^3 - 2 z (\lambda'^1 x + \lambda'^2 y + \lambda'^3 z)] + \\ \quad \quad \quad + (1/r^4) [2 k (y \lambda'^1 - x \lambda'^2)], \\ j^4 = (1/r^6) r^2 \lambda'^4 + (1/r^4) 2 k^2 \lambda'^4. \end{cases}$$

Pour simplifier les équations des lignes de courant nous orientons le vecteur $\vec{\lambda}$ dans la direction de Oz et nous obtenons

$$(IV.13) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{-2 x z \lambda'^3 - 2 k r^2 y \lambda'^3} &= \frac{dy}{-2 y z \lambda'^3 + 2 k r^2 x \lambda'^3} = \\ &= \frac{dz}{r^2 \lambda'^3 - 2 z^2 \lambda'^3} = \frac{-dt}{r^2 \lambda'^4 + 2 k^2 r^4 \lambda'^4}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme des lignes de courant, la troisième égalité (IV.13) est inutile ; l'intégration des deux premières équations est immédiate et nous avons

$$(IV.14) \quad \frac{2(x dx + y dy)}{-4z(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{x^2 + y^2 - z^2},$$

d'où, en posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et en intégrant,

$$(IV.15) \quad r^2 = 2 R \rho$$

et nous retrouvons notre famille de tores.

Une ligne de courant n'est pas une génératrice d'un de ces tores, mais une sorte d'hélice tracée sur ce tore et ayant en quelque sorte la circonférence moyenne de ce tore pour axe. D'ailleurs pour le voir d'une manière plus précise, il suffit de considérer la première équation (IV.13) ; en tenant compte de (IV.15) et en passant aux coordonnées polaires dans le plan xOy , on a

$$(IV.16) \quad d\theta = -\frac{2 R k}{z} d\rho = \mp \frac{2 R k}{\sqrt{2 R \rho - \rho^2}} d\rho ;$$

nous obtenons des courbes du genre indiqué sur la figure 3. Ces courbes représentent les projections des trajectoires sur le plan xOy .

Nous avons vu que les lignes de courant peuvent être engendrées par la composition de deux mouvements :

un point M décrit une génératrice d'un des tores ;

pendant ce temps ce tore tourne autour de l'axe Oz d'un angle donné par (IV.16).

Cette manière de voir nous suggère une possibilité de quantification. En effet, en prenant les coordonnées polaires dans le plan xOy , les équations cinématiques de M sont :

$$(IV.17) \quad \frac{d\theta}{4 k R} = \frac{d\rho}{-2 \varepsilon \sqrt{2 R \rho - \rho^2}} = \frac{-dt}{2 R (1 + 4 k^2 R \rho)}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Calculons l'angle Θ de la figure 3 ainsi que le temps mis pour que le rayon vecteur balaie cet angle. Nous trouvons

$$(IV.18) \quad \Theta = 2 \int_0^{2R} \frac{2 k R d\rho}{\sqrt{2 R \rho - \rho^2}} = 4 \pi R k,$$

$$T_\Theta = 2 \int_0^{2R} \frac{R (1 + 4 k^2 R \rho)}{\sqrt{2 R \rho - \rho^2}} d\rho = 2 \pi R (1 + 4 k^2 R^2).$$

En écrivant la condition de fermeture des courbes, on obtient

$$(IV.19) \quad 4 \pi R k = 2 l \pi,$$

où l est un nombre rationnel, d'où

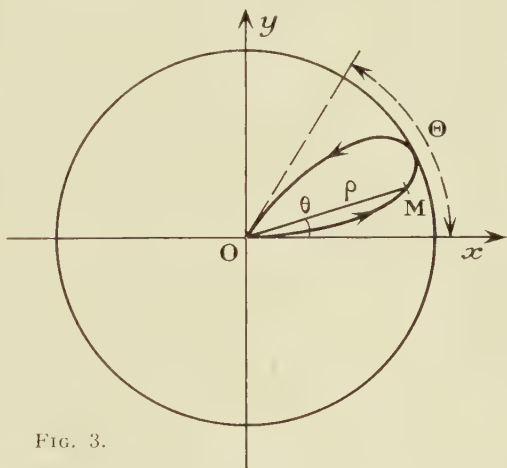


FIG. 3.

$$(IV.20) \quad l = 2 R k$$

et, par suite,

$$(IV.21) \quad T_{\Theta} = (\pi l/k) (1 + l^2) ;$$

d'autre part, soit ω_0 la vitesse angulaire moyenne et ν_0 la fréquence ou, ce qui revient au même, le nombre de rotations complètes du tore par seconde : alors

$$(IV.22) \quad \omega_0 = 2 \pi \nu_0 = \frac{\Theta}{T_{\Theta}} = \frac{2 \pi l k}{\pi l (1 + l^2)} = \frac{2 k}{1 + l^2},$$

d'où, après réintroduction de c , vitesse de la lumière,

$$(IV.23) \quad \nu_0 = 2 k c/2 \pi (1 + l^2) = 2 m_0 c^2/h (1 + l^2).$$

Il est facile de voir que si $l = 1$, ν_0 est égal à la fréquence propre de l'électron, soit

$$(IV.23') \quad \nu_0 = m_0 c^2/h.$$

Donc quand nous imposons la synchronisation entre le mouvement autour de la circonférence moyenne du tore et la rotation de ce tore autour de son axe, la fréquence de rotation commune est égale à la fréquence propre de la particule.

D'autre part, le rayon du tore est alors égal à [d'après (IV.20) où $l = 1$]

$$(IV.24) \quad 2 R = l/k = h/2 \pi m_0 c.$$

Nous voyons que (IV.24) est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Compton.

Donc les solutions singulières permettent, non seulement de voir et de comprendre ce qu'est la fréquence propre de l'électron, mais encore de comprendre la raison profonde du « tremblement de Schrödinger », la fréquence double de ce tremblement provenant seulement du fait que nous sommes obligé d'ajouter des solutions à énergie positive et à énergie négative.

Enfin, du fait que nous prenons une valeur moyenne nous trouvons, pour l'équation de la courbe de la figure 3 dans le cas où $l = 1$,

$$(IV.25) \quad \rho = R - R \sin \theta.$$

Donc la valeur moyenne de ce rayon vecteur est bien

$$(IV.26) \quad \bar{\rho} = R = (1/4 \pi) (h/m_0 c).$$

Pour l'étude du « tremblement de Schrödinger », on se reportera à « La théorie des particules de spin 1/2 (p. 101 et suivantes), de M^r L. de Broglie et à « The principles of quantum mechanics » (p. 262 et 263), de M^r P. A. M. Dirac.

Dans les cas où dans les solutions (IV.2"), k' est différent de 0, tous nos calculs sont encore valables si nous nous contentons de ne garder que les deux premiers termes principaux dans le calcul des composantes du vecteur-courant, mais nous devons remplacer k par k' . En particulier, tous les résultats concernant le « tremblement de Schrödinger » sont valables.

4. Conclusion. — Au terme de notre étude nous pensons que :

a) ce qui caractérise les mouvements d'une particule, ce ne sont pas les solutions des équations du mouvement mais les équations elles-mêmes du mouvement ;

b) il est donc normal d'étudier toutes les solutions possibles de ces équations du mouvement sans en rejeter a priori un certain nombre. En ce qui concerne les équations de la mécanique ondulatoire, il est normal d'étudier les solutions régulières ; mais il est aussi nécessaire d'étudier les solutions singulières et non de les

rejeter à priori, même si ces études doivent mener à une impasse et, à plus forte raison, quand elles conduisent à des résultats assez intéressants comme nous venons de le voir.

RÉFÉRENCES

- L. de BROGLIE, La théorie des particules de spin $1/2$ (électrons de Dirac), éd. Gauthier-Villars, Paris, 1952 ; Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion), éd. Gauthier-Villars, Paris, 1954 ; Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (théorie de la double solution), éd. Gauthier-Villars, Paris, 1956 ; L'interprétation de la mécanique ondulatoire, *Jl Phys.* [8], t. **20**, 1959, p. 963 ; La physique quantique restera-t-elle indéterministe?, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- F. FER, Thèse, Paris, 1956.
- J.-P. VIGIER, Thèse, Paris, 1954.
- N. N. BOGOLIOUBOV & D. V. CHIROV, Introduction à la théorie quantique des champs, éd. Dunod, Paris, 1960.
- J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques, éd. Herman, Paris, 1932 ; Leçons sur la propagation des ondes, éd. Chelsea, 1949.
- J. LERAY, Particules et singularités des ondes, *Cah. Phys.*, t. **15**, 1961, p. 373.
- L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, éd. Herman, Paris, 1957.
- J. G. TAYLOR, Classical electrodynamics as a distribution theory, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. **52**, 1956, p. 119 et t. **54**, 1958, p. 258.
- E. CARTAN, Leçons sur la théorie des spineurs, éd. Herman, Paris, 1938.
- P. A. M. DIRAC, The principles of quantum mechanics, éd. Clarendon Press, Oxford, 1958.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

**« L'_ε entropie au sens de Khinchin ; les théorèmes
de Shannon et leurs inverses. »**

Vu et approuvé :

Paris, le 28 février 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

FRIEDEL.....	T	Physique des solides (Orsay).	CABANNES	T	Mécanique générale.
M. JULIA	T	Etudes des Moléculaires naturelles complexes.	LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
LENDER	T	Biologie Animale S P C N Orsay.	MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
MAGAT	T	Physico-Chimie des radioéléments.	CAIRE	T	Géographie phys. et Géolog. Dynamique.
M ^{lle} QUINTIN	T	Electrochimie.	COMOLET	T	Mécanique des fluides.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.	CORABOEUF	T	Physiologie animale (Orsay).
BENOIT	T	Physiol. animale (Orsay).	DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
DE POSSEL	T	Analyse numérique.	GORENFLOT	T	Botanique II (Orsay)
CHARLOT	T	Chimie analytique.	HOUILLOIN	T	Biologie animale P. C. B.
LEMÉE	T	Physiol. Végét. B M P V (Orsay).	JULLIEN J.	T	Chimie S. P. C. N. (Orsay).
GUERIN	T	Chimie MPC (Orsay).	MALGRANGE	T	Technique Math. de la Physique (Orsay).
CHATELET M.	T	Chimie PCB.	OLIVIER	T	Anthropologie.
JEAN	T	Physique Nucl. Orsay.	NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
MATTLER	T	Physique S. P. C. N.	BLANC-LAPIERRE ..	T	Physique E. N. S. (Orsay).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).	CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
BERTEIN	T	Electronique (Orsay).	KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
BOUSSIÈRES	T	Chimie des radioéléments (Orsay).	SAMUEL	T	Mathémat. E. N. S. féminines.
M ^{me} COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique.	KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
ELLENBERGER	T	Géologie des grandes régions du globe.	THIRY	T	Mécanique céleste.
FRANC	T	Biologie animale PCB.	ABELES	T	Physique S. P. C. N.
SCHNELL	T	Botanique tropicale (Orsay).	AMAT	T	Physique P. C. B.
STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale.	AUBOIN	T	Géologie.
ACHER	T	Chimie Biol. (Orsay).	M ^{me} BENOIT-GUEUTAL	T	Physique Nucl. et radioactivité.
BAUDOIN	T	Biologie animale PCB.	BOUGIS	T	Biologie marine (Villefranche/mer).
BEAUMONT	T	Biologie animale SPCN.	BRUHAT	T	Mathématiques M. P. C.
BLAMONT	T	Géophysique ionosphère.	BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
BOURREAU	T	Botanique.	CHABBAL	T	Physique M. G. P. (Orsay).
CURIE D.	T	Physique MGP.	DEHEUVELS	T	Mathématique Propé (Orsay).
DURAND-DELGA. .	T	Géologie.	D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FREON	T	Chimie organique (Orsay).	FURON	T	Géologie S. P. C. N.
HELLER	T	Physiol. végétale.	M ^{me} GANS	T	Génétique.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.	GENEVES	T	Biologie végétale P. C. B.
CAILLEUX	T	Géologie (SPCN).	GUILBERT	T	Physique (C. U. S. Orléans).
MAGNAN	T	Physique SPCN.	HUPE	T	Pétrographie.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la chimie Théorique et à la Phys. Nucléaire.	HOLLANDE	T	Biologie générale.
M ^{lle} FOURCROY ...	T	Biologie Végétale S. P. C. N.	LIONS	T	Analyse numérique.
M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T	Mécan. Analytique et mécanique céleste.	MAITTE	T	Chimie P. C. B.
M ^{lle} VEIL	T	Physiologie Générale.	MEYER	T	Physique propédeutique.
LWOFF	T	Microbiologie.	NICOLAS	T	Géologie appliquée.
SIETRUNK	T	Mécan. Phys. et Expér.	PANIGEL	T	Biologie générale.
LACOMBE	T	Métallurg. des métaux Nucléaires.	RAVIER	T	Pétrographie.
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).	ROSEAU	T	Mécanique théor. des fluides.
			ROUBINE	T	Electronique.
			SILBERT	T	Chimie P. C. B.
			UEBERSFELD	T	Electronique.
			YVON	T	Théories Physiques.

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN

